Számtani sorozatok multiplikatív tulajdonságú halmazokban

MTA doktori értekezés tézisei

Hajdu Lajos

Debrecen, 2009

Tartalomjegyzék

I. A kitűzött kutatási feladat rövid összefoglalása

A számelmélet számtalan kérdése az egész számok additív illetve multiplikatív struktúrájával kapcsolatos. Ezek közül több érdekes, nehéz klasszikus probléma olyan összefüggésekre vonatkozik, ahol additív módon definiált objektumok multiplikatív tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak, avagy éppen fordítva, multiplikatív eszközökkel meghatározott számok, halmazok bizonyos additív tulajdonságait firtatjuk. Az ilyen jellegű kérdések általában rendkívül nehezek, mivel igen laza a kapcsolat az egészek additív és multiplikatív struktúrája között. Tipikus példaként megemlíthetjük a híres Fermat-egyenletet, vagy akár a mindmáig megoldatlan ikerprím-problémát és a Goldbach-sejtést.

Disszertációnkban olyan eredményeket tárgyalunk, melyek multiplikatív módon definiált számhalmazokban található számtani sorozatokkal kapcsolatosak. Értekezésünk három fejezetből áll. Az első fejezetben n-edik hatványokból álló számtani sorozatokat vizsgálunk, illetve általánosabban számtani sorozatok tagjainak szorzataiban található teljes hatványokkal foglalkozunk. A második fejezetben a kérdéskör általánosításaként teljes (de nem feltétlenül azonos kitevőjű) hatványokból álló számtani sorozatokat vizsgálunk. Végül a harmadik fejezetben úgynevezett S-egységek összeghalmazaiban található számtani sorozatokkal foglalkozunk. Eredményeinknek több, egymástól meglehetősen távol álló, első ránézésre meglepőnek tűnő alkalmazását adjuk. Mindhárom fejezetben először az éppen vizsgált problémát illetve annak hátterét, irodalmát mutatjuk be. Ezek után a disszertációban szereplő legfontosabb eredményeink ismertetése következik. Mivel a tárgyalt témakörök a diofantikus számelmélet homlokterébe tartozó, sokak által vizsgált területek közé tartoznak, az eredmények irodalmi elhelyezésére különös hangsúlyt fektetünk.

A disszertációban szereplő eredményeket a következő kilenc (nyolc már megjelent, valamint egy közlésre elfogadott) publikációban közöltük: [FH01], [GyHP09], [BBGyH06], [HTT09], [H04], [BGyHT06], [H08], [H07], [BHP].

II. A vizsgálatok során felhasznált módszerek

Ebben a fejezetben röviden felsoroljuk a kutatásaink során felhasznált legfontosabb módszereket, illetve felvázoljuk azok hátterét. A módszerek pontosabb, részletesebb ismertetése, illetve konkrét felhasználásuk illusztrálása eredményeink bemutatásánál (a következő fejezetben) található. Megjegyezzük, hogy sok esetben ezen módszerek továbbfejlesztésére, illetve egymással és más eljárásokkal való kombinálására volt szükség ahhoz, hogy azokat a vizsgált problémákra alkalmazni tudjuk.

Az elsőként ismertetett négy módszer különösen a III.1 és III.2 fejezetekben szereplő eredmények bizonyítása során bír kiemelkedően nagy jelentőséggel.

Az elliptikus egyenletek effektív és explicit elmélete. Tekintsünk egy $f(x) = y^2$ alakú egyenletet, ahol f egy harmadfokú egész együtthatós polinom nemnulla diszkriminánssal, x, y pedig ismeretlen egészek. Ekkor egyenletünk egy úgynevezett elliptikus diofantikus egyenlet. Baker [Bak68b] egy klasszikus eredménye alapján ismert, hogy az egyenlet x, y megoldásainak abszolút értéke egy csupán f együtthatóitól függő effektív értékkel korlátozható. Az egyenlet összes megoldásának meghatározásához azonban egy Lang [L64], [L78] és Zagier [Za87] által megalapozott, Gebel, Pethő, Zimmer [GPZ94] illetve tőlük függetlenül Stroeker és Tzanakis [StTz94] által kidolgozott eljárást érdemes követnünk, mely az egyenlet racionális megoldásai által meghatározott algebrai struktúra, az úgynevezett Mordell-Weil csoport tulajdonságain alapszik. Az eljárás jól algoritmizálható, és a SIMATH [Sm93] majd később a MAGMA [BCP97] programcsomagban implementálásra is került. Így ezen programcsomagok felhasználásával (legalábbis elviekben) egy adott elliptikus egyenlet összes egész megoldása meghatározható.

A 2 génuszú görbék explicit elmélete (a Chabauty-módszer). Tekintsünk egy $f(x) = y^2$ alakú egyenletet, ahol f egy ötöd- vagy hatodfokú egész együtthatós polinom nemnulla diszkriminánssal, x, y pedig ismeretlen racionális számok. Ismert, hogy ekkor egyenletünk egy 2 génuszú görbét határoz meg. Faltings [F83] egy ünnepelt eredménye alapján tudjuk, hogy az egyenlet csupán véges sok x, y racionális megoldással rendelkezik. Faltings tétele azonban ineffektív, nem teszi lehetővé a megoldások explicit meghatározását. Ehhez egy Chabauty [C41] által megalapozott, később Flynn és mások (lásd például a [F97] cikket és az ottani hivatkozásokat) által finomított, továbbfejlesztett módszerre van szükség. Problémáink vonatkozásában sok esetben az eljárás úgynevezett „elliptikus” változata is jól használhatónak bizonyult (lásd [Br03]).

Ternér egyenletek és a moduláris módszer. Tekintsünk egy $Ax^n + By^n = Cz^m$ alakú úgynevezett (n, n, m) szignatúrájú ternér egyenletet, ahol A, B, C adott nemnulla egészek, x, y, z és n ismeretlen egészek, $n \geq 3$, és $m \in \{2, 3, n\}$. Az A, B, C együtthatókra (pontosabban csupán azok prímtényezőire) rótt bizonyos feltételek mellett a Wiles [W95], Darmon és Merel [DM97], Kraus [K97], Ribet [Rib97] és mások által kifejlesztett moduláris módszer segítségével lehetővé vált az ilyen típusú egyenletek megoldása. Amikor $A = B = C = 1$ és $m = n$, egyenletünk éppen a Fermat-egyenlet, melyet Wiles éppen az említett módszer segítségével oldott meg. Azóta az egyenletet számos más A, B, C érték mellett is sikerült megoldani, lásd például

[BS04], [BVY04]. Ezek az irodalomban található egyenletek, illetve az általunk megoldott nagyszámú, új ternér egyenletek [BBGyH06], [GyHP09] rendkívül fontos, újszerű eszközt jelentettek különböző vizsgálataink során.

Kombinatorikus módszerek, ternér egyenletek szitálása. Eredményeink igazolásához számos prímszámelméleti és kombinatorikus eszköz, módszer felhasználására volt szükség. Ehelyütt csupán egy általunk kifejlesztett szitamódszerről szólunk.

Számtani sorozatban található „majdnem” teljes n-edik hatványokkal kapcsolatos eredményeink bizonyításának egyik legfontosabb eszköze (legalábbis $n \geq 7$ esetén) a fent említett moduláris módszer. Problémánk vonatkozásában ezen eszköz elvileg könnyen használható: a vizsgált kérdés egyszerűen visszavezethető (n, n, m), $m \in \{2, 3, n\}$ alakú ternér egyenletek megoldására. Azonban a megoldandó ternér egyenletek száma a számtani sorozat hosszának növelésével rendkívül gyorsan növekszik: a hagyományos módszerekkel már nem kezelhető a probléma, meg kell birkóznunk a kombinatorikus robbanás jelenségével. Ráadásul a moduláris elmélet alkalmazhatóságát nagyban megkönnyíti (sőt sokszor csupán az teszi lehetővé), ha egy további információval is rendelkezünk: a ternér egyenletben ismerjük az xy egy konkrét prímosztóját. Ezen nehézségek leküzdése gondos megközelítést igényel, a „nyers erő” messze nem elegendő. Vizsgálataink során egy olyan kombinatorikai megfontolásokon alapuló szitálást dolgoztunk ki, amely lehetővé teszi nagy számú eset egyidejű vizsgálatát, illetve a moduláris technika hatékony alkalmazását [GyHP09].

A következő szakaszban ismertetett módszerek, eredmények a III.3 fejezetben bemutatott tételek bizonyítása során jutnak rendkívül fontos szerephez.

A S-egység egyenletek effektív és ineffektív elmélete. A szükséges jelölések bevezetése sok időt igényelne, ezt a későbbiekben tesszük majd meg (lásd a III. fejezet III.3. alfejezetét). Az S-egység egyenletek a diofantikus egyenletek elméletében igen fontos szerepet játszanak. Ennek egyik oka az, hogy a széteső forma egyenletek (például a norma forma egyenletek, a Thue-egyenletek, a diszkrimináns forma egyenletek, az index forma egyenletek) visszavezethetők S-egység egyenletekre ([Gy80], [EGy85], [EGy88a], [EGy88b], [EGyST88]). Emellett sok más klasszikus, alapvető fontosságú diofantikus probléma direkt módon egységegyenletek megoldására vezet (lásd például [EGyST88], [Gy92]).

Mély diofantikus approximációelméleti eszközök (a Schmidt-féle altér tétel) felhasználásával megmutatható, hogy egy legalább kétváltozós S-egység egyenlet csupán véges sok nemelfajuló megoldással rendelkezik ([E84], [vdPS82]). Ezen túl egy ilyen típusú egyenlet megoldásszáma is korlátozható (lásd például az [ESS02], [AV] munkákat, illetve a bennük található megfelelő hivatkozásokat). Ezek az eredmények ineffektívek, azonban a kétváltozós esetben a Baker-módszer segítségével maguk az ismeretlenek (pontosabban azok magassága) is korlátozható ([Gy79], [ShTi86], [EGyST88], [Gy92], [BGy96], [Gy02], [GyY06]), ami elvileg már a megoldások meghatározását is lehetővé teszi.

III. A tudományos eredmények rövid összefoglalása

Ebben a fejezetben tömören összefoglaljuk a disszertációnkban szereplő eredményeket.

III.1 Számtani sorozatot alkotó n-edik hatványok

E terület alapkérdése a következő: adott $n \geq 2$ egész szám esetén milyen hosszú lehet egy n-edik hatványokból álló számtani sorozat? A kérdés Fermat és Euler munkásságáig nyúlik vissza (lásd [Di66], 440. és 635. oldal). Amint azt Fermat megfogalmazta majd Euler be is bizonyította, négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot. Ugyanakkor jól ismert, hogy az

$$X^2 - 2Y^2 = -1$$

Pell-egyenlet végtelen sok X, Y egész megoldással rendelkezik. Így (mivel a megoldások nyilvánvalóan egy $1, Y^2, X^2$ alakú számtani sorozatot határoznak meg) eredeti kérdésünk négyzetszámok esetére megoldottnak tekinthető. A probléma általános $n \geq 3$ esetén egy X^n, Z^n, Y^n alakú számtani sorozatból kiindulva az

$$X^n + Y^n = 2Z^n \tag{1}$$

diofantikus egyenlet megoldásainak meghatározására vezet. Nyilván elég azzal az esettel foglalkozni, amikor X, Y, Z relatív prímek. Az (1) egyenletet többen vizsgálták. Az $n = 3$ eset már Mordell klasszikus könyvében ([Mo69], 126. oldal) szerepel, míg az $n = 5$ kitevő vizsgálata egészen Dirichlet és Lebesgue bizonyos eredményeiig nyúlik vissza (lásd [Di66], 735. és 738. oldal). Az első általánosabb érvényű eredmény Dénes [De52] nevéhez fűződik, akinek $n \leq 31$ esetén sikerült (1)-et teljesen megoldania. Valamennyi említett esetben az adódott, hogy az egyenlet csupán az $|XYZ| \leq 1$ feltételnek eleget tevő megoldásokkal rendelkezik. Az (1) egyenletet végül a közelmúltban Darmon és Merel [DM97] oldotta meg teljes általánosságban. Azt nyerték, hogy az egyenlet bármely $n \geq 3$ kitevő esetén csak a már említett $|XYZ| \leq 1$ feltételt teljesítő megoldásokkal bír. Darmon és Merel bizonyításának hátterében a Fermat-egyenlet megoldása során a Wiles [W95] és mások által kidolgozott moduláris módszer áll. Megemlítjük, hogy az (1) egyenlet megoldása a Fermat-egyenlet megoldásánál lényegesen nehezebb, a nemtriviális $(X, Y, Z) = (1, 1, 1)$ megoldás létezése miatt ugyanis a moduláris technika alkalmazása komoly nehézségekbe ütközik.

Az alapkérdés általánosításaként, egy önmagában is érdekes és szerteágazó problémakör kiindulópontjaként tekintsük az

$$x(x + d) \dots (x + (k - 1)d) = by^n \tag{2}$$

diofantikus egyenletet, ahol x, d, k, b, y, n ismeretlen pozitív egészek, melyekre $k, n \geq 2$, $\mathrm{lnko}(x, d) = 1$ és $P(b) \leq k$ teljesül. Itt $P(b)$ a b legnagyobb prímosztóját jelöli; $P(1) = 1$. Az egyenlettel rengeteg matematikus foglalkozott, ezen a ponton csupán Fermat, Euler, Erdős, Selfridge, Obláth, Nesterenko, Shorey, Tijdeman, Saradha, Győry, Brindza, Ruzsa, Bennett, Pintér nevét említjük. A későbbiekben majd eredményeket és hivatkozásokat is megfogalmazunk.

Egyszerű, de a későbbiekben rendkívüli jelentőséggel bíró észrevételként megállapíthatjuk, hogy $\mathrm{lnko}(x, d) = 1$ miatt (2)-ből

$$x + id = a_i x_i^n \tag{3}$$

adódik, ahol a_i négyzetmentes és $P(a_i) \leq k$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$. Ez az észrevétel azért is érdekes, mert úgy is értelmezhető, hogy az egyenlet megoldása során „majdnem" teljes hatványokból álló számtani sorozatokhoz jutunk: a sorozat tagjai egy teljes hatvány és egy korlátos, csupán „kis" prímekkel osztható együttható szorzataként állnak elő. Így (2) valóban a korábban említett probléma általánosításának tekinthető.

A (2) egyenlet kiinduló esete természetes módon a $d = 1$ választás. Ha a $b = 1$ értéket is rögzítjük, akkor egy szép, klasszikus kérdéshez jutunk: lehet-e egymást követő pozitív egészek szorzata teljes hatvány? Az $n = 2$ esetben Erdős [Er39] és Rigge [Rig39] egymástól függetlenül nemleges választ adtak erre a kérdésre. A probléma teljes megoldása Erdős és Selfridge [ES75] nevéhez fűződik, akik belátták, hogy a (2) egyenletnek (a $d = b = 1$ esetben) nincs megoldása. Egy másik természetes kérdés az egyenlet $d = 1$, $b = k!$ esetén történő vizsgálata. Ekkor ugyanis (2)

$$\binom{x + k - 1}{k} = y^n \tag{4}$$

alakra hozható, azaz teljes hatványokat keresünk a binomiális együtthatók körében. Itt a binomiális együttható szimmetriája miatt elegendő az $x > k$ esettel foglalkoznunk. Feltesszük továbbá, hogy $n = 2$ esetén $k > 2$ teljesül.

Az $n = k = 2$ választásnál ugyanis (4) (régóta ismert módon) egy végtelen sok megoldással rendelkező Pell-egyenletre vezet. A (4) egyenletet Erdős [Er51] $k \geq 4$ esetén teljesen megoldotta. A $k = 2, 3$ esetek azonban Erdős elemi kombinatorikus számelméleti megfontolásokon alapuló, rendkívül szellemes módszerével nem voltak kezelhetők. Tijdeman [Ti89] a Baker-módszer segítségével megmutatta, hogy ezekben az esetekben $\max(x, y, n)$ egy effektív módon meghatározható abszolút konstanssal korlátozható. Végül a problémát Darmon és Merel [DM97] fent említett eredménye segítségével Győry [Gy97] oldotta meg, megmutatva, hogy a (4) egyenlet egyetlen megoldása $(x, k, y, n) = (48, 3, 140, 2)$. Végül a $d = 1$ eset lezárásaként megemlítjük, hogy Saradha [Sa97] ($k \geq 4$ eset) és Győry [Gy98] ($k = 2, 3$ eset) a $P(b) \leq k$ általános feltétel mellett a (2) egyenletet teljesen megoldotta. Egyetlen megoldásként $P(y) > k$ esetén a már említett $(x, k, y, n) = (48, 3, 140, 2)$ adódott. (A $P(y) > k$ feltétel nélkül az egyenlet végtelen sok, könnyen jellemezhető triviális megoldással bír.)

A $d > 1$ eset szintén hatalmas, messzire visszanyúló irodalommal rendelkezik: elég csupán Fermat és Euler már említett eredményére gondolnunk. Valóban, annak igazolásához, hogy négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot, Euler valójában (a kérdés általánosításaként) az

$$x(x + d)(x + 2d)(x + 3d) = y^2$$

egyenletet vizsgálta - amely nem más, mint (2) a $k = 4$, $n = 2$, $b = 1$ választások mellett. Euler megmutatta, hogy a fenti diofantikus egyenletnek nincs x, y, d pozitív egészekben megoldása. Már ezen a ponton megemlítjük, hogy a (2) egyenlet $d > 1$ értékeire történő teljes megoldása e pillanatban még nagyon távolinak tűnik. Az általános eset ugyanis lényegesen, minőségileg nehezebb a $d = 1$ speciális esetnél. Ez jól szemléltethető például (3) segítségével. Ha $d = 1$, akkor a szóbanforgó számtani sorozat i-edik és j-edik ($i \neq j$) tagjainak különbségét képezve egy

$$AX^n - BY^n = C \tag{5}$$

alakú, úgynevezett binom Thue-egyenlethez jutunk, ahol $A = a_i$, $B = a_j$, $X = x_i$, $Y = x_j$, $C = i - j$. Az egyenlet régóta ismert. Baker [Bak68a] valamint Schinzel és Tijdeman [ScTi76] a Baker-módszer segítségével nyert eredményeiből következik, hogy $n \geq 3$ és $|Y| > 1$ esetén (5)-ben $\max(|X|, |Y|, n)$ egy csak A, B, C értékétől függő, effektív módon meghatározható konstanssal korlátozható. Megemlítjük, hogy az A, B, C együtthatókra vonatkozó bizonyos feltételek mellett a közelmúltban az (5) egyenlet összes megoldását sikerült meghatározni; lásd például [BGyMP06], [GyP08], [BMS08], [BBGyP].

Ezzel szemben, ha $d > 1$ tetszőleges ismeretlen egész, akkor egy (5)-höz hasonló összefüggés levezetéséhez két tag helyett **három** tagot, mondjuk az

i_1, i_2, i_3 indexű tagokat kell használnunk, ahol $0 \leq i_1 < i_2 < i_3 < k$. Mivel egy számtani sorozattal van dolgunk, könnyen ellenőrizhető, hogy (3) alapján ekkor

$$AX^n + BY^n = CZ^n \tag{6}$$

teljesül, ahol $X = x_{i_1}^n$, $Y = x_{i_3}^n$, $Z = x_{i_2}^n$, $A = i_3 - i_2$, $B = i_2 - i_1$, $C = i_3 - i_1$. Azonban (6) egy, az (5) egyenletnél lényegesen nehezebb úgynevezett ternér egyenlet, melynek például a Fermat-egyenlet (lényegében a legegyszerűbb) speciális esete. A (6) egyenlet tetszőleges n-re való kezeléséhez az (éppen a Fermat-egyenlet megoldása során Wiles [W95] és mások által kifejlesztett) úgynevezett moduláris módszer szükséges. Ezen a ponton e módszerről még nem szólunk részletesen, erre a későbbiekben kerül majd sor. Csupán megemlítjük, hogy a (6) típusú egyenletek hátterében álló mély problémák miatt (2) teljes megoldása a jelenlegi ismeretekre támaszkodva egyelőre áthidalhatatlannak tűnő nehézségekbe ütközik.

A (2) egyenlettel kapcsolatos kutatások lényegében két fő irányban folynak: az egyenlet megoldásaira vonatkozó végességi tételek levezetése (bizonyos paraméterekre vonatkozó korlátok igazolása más paraméterek függvényében); illetve (2) teljes megoldása bizonyos paraméterek rögzítése után. A jelen disszertációban az utóbbi irányba tartozó eredményekről szólunk. Az elsőként említett kutatási irány legfontosabb eredményeit illetve más kapcsolódó eredményeket többek között a [Ti76a], [ShTi97], [Ti98], [Gy99], [Sh02] áttekintő cikkekben találhatunk.

Általánosságban elmondható, hogy a (2) egyenlet bizonyos esetekben való teljes megoldását az algebrai görbeelmélet közelmúltbeli jelentős fejlődése, és az új eredmények hatékony alkalmazási lehetőségeinek kidolgozása tette lehetővé. Ezen belül, a már említett moduláris módszer mellett különösen fontos szerep jut az elliptikus görbék (1 génuszú görbék) illetve a magasabb génuszú görbék, valamint a rájuk vonatkozó eredmények alkalmazásainak. Az ilyen típusú görbék elsősorban kis kitevők (azaz a (2) egyenletben tipikusan $n = 2, 3$ esetén) bizonyulnak rendkívül hasznosnak. Megemlítjük, hogy az elliptikus görbéknek a problémakörben való első alkalmazása az [FH01] cikkünkben történt, míg a 2 génuszú görbék használatára illetve ehhez kapcsolódóan az ún. Chabauty-módszer alkalmazására (lásd [C41], [F97], [Br03] valamint az utóbbi két cikkben szereplő hivatkozásokat) (2) vonatkozásában először a [BBGyH06] dolgozatunkban került sor.

Elsőként bemutatandó konkrét eredményként a (2) egyenlet teljes megoldásának lehetőségeit tárgyaljuk $n = 2$ és tetszőleges, de rögzített d esetén. Megemlítjük, hogy (mint azt több, a későbbiekben bemutatandó hivatkozás is igazolja) az $n = 2$ eset különleges figyelmet érdemel. Ennek oka abban keresendő, hogy ekkor több olyan eszköz is rendelkezésre áll, melyek nagyobb kitevőkre nem használhatók. Mivel ennek a megfordítása is igaz (azaz a nagyobb n kitevőkre használható módszerek $n = 2$-re sokszor csődöt mondanak), így elmondható, hogy ez az eset valóban különös jelentőséggel bír.

III.1.1 A (2) egyenlet teljes megoldása rögzített d és $n = 2$ esetén

Az $n = 2$ esetben rögzített d mellet lehetőség nyílik (2) teljes megoldására. Ehhez elméleti szempontból a legjobb kiindulópontot Shorey és Tijdeman [ShTi90] egy eredménye jelenti, mely szerint ebben az esetben k értéke már d prímosztói számának segítségével is korlátozható. (A korábbi hasonló eredmények áttekintésért lásd [ShTi90].) Ez azonban önmagában még messze nem elegendő a (2) egyenlet teljes megoldásához. Az első, (2) összes megoldását szolgáltató eredményt Saradha [Sa98] nyerte $d \leq 22$ esetén. Saradha eredménye lényegében Erdős és Selfridge [ES75] a $d = 1$ esetre vonatkozó kombinatorikus eredményének a $d > 1$ esetre történő adaptálásával történt. Ezen kívül elmondható, hogy Saradha kombinatorikus-prímszámelméleti módszere heurisztikus elemeket is tartalmaz, elvileg nincs arra garancia, hogy az eljárás valóban működik tetszőleges d esetén is. Az [FH01] cikkben egy újszerű, modern eszközökön alapuló, minden esetben hatékonyan működő eljárást adtunk (2) összes megoldásának meghatározására rögzített d és $n = 2$ mellett. A módszer lényege annak észrevételén múlik, hogy (3) alapján a szóban forgó számtani sorozat bármely három, mondjuk az i_1, i_2, i_3 indexű tagjait összeszorozva egy

$$(x + i_1 d)(x + i_2 d)(x + i_3 d) = cz^2 \tag{7}$$

alakú egyenlethez jutunk. Itt $c = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}$ és $z = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}$ teljesül. Rögzített d esetén (7) egy elliptikus egyenlet, melynek x, z egész megoldásait keressük. Ehhez egy Lang [L64], [L78] és Zagier [Za87] által megalapozott, Gebel, Pethő, Zimmer [GPZ94] illetve tőlük függetlenül Stroeker és Tzanakis [StTz94] által kidolgozott eljárást érdemes követnünk, mely az egyenlet racionális megoldásai által meghatározott algebrai struktúra, az úgynevezett Mordell-Weil csoport tulajdonságain alapszik. Az eljárás jól algoritmizálható, és a SIMATH [Sm93] majd később a MAGMA [BCP97] programcsomagban implementálásra is került. Így ezen programcsomagok felhasználásával (legalábbis elviekben) egy adott elliptikus egyenlet összes egész megoldása meghatározható.

A fentiek ismeretében a (2) egyenlet $n = 2$ és rögzített d esetén történő teljes megoldására általunk [FH01] adott algoritmus vázlata a következő. Mivel d rögzített, így k értéke korlátozható: az első ilyen jellegű eredmény Marszalek [Mar85] nevéhez fűződik, mi konkrétan Saradha [Sa98] idevágó eredményeit használtuk. Emiatt (3) alapján, mivel a_i négyzetmentes és $P(a_i) \leq k$ ($i = 0, 1, \ldots, k-1$), valójában csupán véges sok (7) alakú egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletek megoldása a fent ismertetett módon történhet. Megemlítendő, hogy ha a k értékére kapott korlát túl nagy, akkor a fellépő elliptikus egyenletek óriási száma gyakorlati szempontból kezelhetetlenné teszi a problémát. Részben éppen ez jelentette [BHR00] motivációját: az itt (bizonyos feltételek mellett) levezetett $k \leq 7$ igen éles korlát az ismertetett eljárás hatékony működésének egyik elméleti sarokpontja. Módszerünk illusztrálásaként [FH01]-ben az egyenletet $23 \leq d \leq 30$ esetén teljesen megoldottuk, és az alábbi eredményt nyertük.

1. Tétel ([FH01]) *A* (2) *egyenlet összes megoldása* $23 \leq d \leq 30$ *és* $n = 2$ *esetén:*

$$(x, d, k, b, y) = (2, 23, 3, 6, 20), (4, 23, 3, 6, 30), (75, 23, 3, 6, 385),$$

$$(98, 23, 3, 2, 924), (338, 23, 3, 3, 3952), (3675, 23, 3, 6, 91805),$$

$$(75, 23, 4, 6, 4620), (1, 24, 3, 1, 35).$$

Itt valójában nem maga a konkrét tétel az érdekes (azt csak a teljesség kedvéért fogalmaztuk meg), sokkal inkább az alkalmazott módszer bír nagy jelentőséggel. Eljárásunkat többek között az [SS03a], [SS03b], [MS04] cikkek is átvették illetve részben továbbfejlesztették, így az a konkrét problémakörben is több alkalmazást nyert. (Például [SS03a]-ban a szerzők módszerünk továbbfejlesztésével az 1. Tételt kiterjesztették a $d \leq 104$ esetre.) Ugyanakkor fontos megemlítenünk, hogy az általunk bevezetett új eszköz, azaz az elliptikus görbék használata az éppen tárgyalt problémán messze túlmutat. Erről a későbbiekben még részletesebben szólunk majd. Most csupán azt említjük meg, hogy (2)-ben az általános n kitevők esetén felhasználható moduláris módszer a „kis" kitevőkre (pontosabban tipikusan $n = 2, 3, 5$ esetén) nem működik. Ezekben az esetekben a probléma megoldásához más eszközök használatára van szükség. Az $n = 2, 3$ esetben az egyik ilyen eszközt éppen az elliptikus egyenletek a fentiekhez hasonló vagy annál általánosabb használata jelenti.

III.1.2 A (2) egyenlet teljes megoldása rögzített k esetén

A (2)-re vonatkozó egyik legtermészetesebb kérdés a következő: oldjuk meg az egyenletet rögzített k tagszám esetén! Az irodalomban számos ez irányú eredmény található, lásd például Euler már említett, vagy Obláth [Ob50], [Ob51] tételeit. Ezek az eredmények azonban csupán speciális, fix n kitevőkre (nevezetesen $n = 2, 3$ esetére) vonatkoznak. A moduláris módszer megjelenésével lehetővé vált az egyenlet rögzített k esetén történő teljes megoldása, tetszőleges ismeretlen n kitevő mellett. A moduláris módszer alkalmazhatóságát a tekintett problémára a (3) összefüggés teszi lehetővé: ez alapján bármely három különböző tag megfelelő lineáris kombinációját tekintve egy (6) alakú, úgynevezett (n, n, n) szignatúrájú ternér egyenlethez jutunk. Felhasználva Wiles [W95], Darmon és Merel [DM97] valamint Ribet [Rib97] erdeményeit, ahol $A = B = 1$ mellett C értéke rendre 1, 2 és 2^α, Győry [Gy99] megmutatta, hogy a (2) egyenletnek $k = 3$ és $P(b) \leq 2$ esetén nincs megoldása. A későbbiekben (általánosabb ternér egyenletekre vonatkozó, az alábbiakban bemutatandó eredmények segítségével) Győryvel és Saradhával [GyHS04] sikerült kiterjesztenünk az eredményt a $k = 4, 5$ esetre is.

A jelen értekezésben tárgyalt ez irányú fő eredményünk a következő.

2. Tétel. **([GyHP09])** *Ha* $3 < k < 35$ *és* $b = 1$*, akkor a* (2) *egyenletnek nincs megoldása.*

Más szavakkal, $3 < k < 35$ esetén egy k-tagú primitív (az $\text{lnko}(x, d) = 1$ feltételnek eleget tevő) számtani sorozat tagjainak szorzata nem lehet teljes hatvány.

Ez az eredmény az alábbi, általánosabb tételek következményeként adódik. Megemlítjük, hogy a felsorolt eredmények, pontosabban a 3-7. Tételek valójában az $x < 0, y < 0$ esetet is lefedik. Ezekben az állításokban (a többi korábbi feltétel változatlanul hagyása mellett) x és y tetszőleges nemnulla egészek lehetnek. Első eredményünk a $k \leq 11$ esetre vonatkozik.

3. Tétel. **([BBGyH06])** *Legyenek* k *és* n *olyan egészek, melyekre* $3 \leq k \leq 11$*,* $n \geq 2$ *prím és* $(k, n) \neq (3, 2)$ *teljesül. Tegyük fel továbbá, hogy* x *olyan egész, valamint* d *és* b *olyan pozitív egészek, hogy* $\text{lnko}(x, d) = 1$ *és* $P(b) \leq P_{k,n}$*, ahol* $P_{k,n}$ *értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:*

k	$l=2$	$l=3$	$l=5$	$l \geq 7$
3	–	2	2	2
4	2	3	2	2
5	3	3	3	2
6	5	5	5	2
7	5	5	5	3
8	5	5	5	3
9	5	5	5	3
10	5	5	5	3
11	5	5	5	5

Ekkor a (2) *egyenlet megoldásaira*

$$(x, d, k) \in \{(-9, 2, 9), (-9, 2, 10), (-9, 5, 4), (-7, 2, 8), (-7, 2, 9), (-6, 1, 6), \\ (-6, 5, 4), (-5, 2, 6), (-4, 1, 4), (-4, 3, 3), (-3, 2, 4), (-2, 3, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 6)\}$$

teljesül.

Az egyszerűség kedvéért csupán a megoldásokban előforduló x, d, k értékeket adtuk meg; a hozzájuk tartozó b, y, n értékek (2)-ből könnyen kiszámolhatók.

Amint azt korábban is említettük, a 2. Tétel (illetve a kapcsolódó általánosabb eredmények) bizonyítása során érdemes megkülönböztetni az $n \geq 7$, $n = 5$, $n = 3$ és $n = 2$ eseteket. Ennek oka az, hogy az egyes esetek tárgyalása eltérő módszereket igényel. Az $n \geq 7$ eset lényegében egy, a moduláris technikán alapuló megközelítéssel kezelhető. Az $n = 5$ kitevőértékhez tartozó eset klasszikus algebrai számelméleti eredmények segítségével tárgyalható. Az $n = 3$ és $n = 2$ esetben több módszer ötvözése hozza meg a kívánt eredményt: a bizonyítások többek között a Chabauty-módszeren, az elliptikus egyenletek elméletén, illetve lokális vizsgálatokon alapulnak. A későbbiekben a bizonyítások hátterében álló módszerekről részletesebben is szólunk majd.

Az alábbiakban eszerint a felosztás szerint haladunk, a 3. Tétel által nem lefedett $12 < k < 35$ értékekre szorítkozva. A következő tételünk az $n \geq 7$ esetre vonatkozik.

4. Tétel. ([GyHP09]) *Ha $n \geq 7$ prím, $12 \leq k < 35$ és $P(b) \leq P_{k,n}$ teljesül, ahol*

$$P_{k,n} = \begin{cases} 7, & \text{ha } 12 \leq k \leq 22, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{ha } 22 < k < 35, \end{cases}$$

akkor a (2) *egyenletnek nincs megoldása.*

Következő eredményünk az $n = 5$ esetet tárgyalja. Megemlítjük, hogy $8 \leq k \leq 11$ esetén az 5. Tétel a 3. Tétel javítását is szolgáltatja.

5. Tétel. ([GyHP09]) *Legyen $n = 5$, $8 \leq k < 35$ és $P(b) \leq P_{k,5}$, ahol*

$$P_{k,5} = \begin{cases} 7, & \text{ha } 8 \leq k \leq 22, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{ha } 22 < k < 35. \end{cases}$$

Ekkor a (2) *egyenlet megoldásaira az alábbiak egyike teljesül:*

$$(k, d) = (8, 1),\ x \in \{-10, -9, -8, 1, 2, 3\}, \quad (k, d) = (8, 2),\ x \in \{-9, -7, -5\},$$
$$(k, d) = (9, 1),\ x \in \{-10, -9, 1, 2\}, \quad (k, d) = (9, 2),\ x \in \{-9, -7\},$$
$$(k, d) = (10, 1),\ x \in \{-10, 1\}, \quad (k, d, x) = (10, 2, -9).$$

Az alábbi két tételünk az $n = 3$ esetre vonatkozik. Az első, $b = 1$ mellett megfogalmazott állítás valójában a második, általánosabb b értékekre vonatkozó eredmény következménye.

6. Tétel. **([HTT09])** *Legyen* (x, d, k, y) a (2) *egyenlet egy megoldása* $n = 3$, $k < 39$ *és* $b = 1$ *mellett. Ekkor*

$$(x, d, k, y) = (-4, 3, 3, 2), (-2, 3, 3, -2), (-9, 5, 4, 6), (-6, 5, 4, 6).$$

7. Tétel. **([HTT09])** *Legyen* (x, d, k, b, y) a (2) *egy olyan megoldása, melyre* $n = 3$, $k < 32$, *és* $P(b) < k$ *ha* $k = 3$ *vagy* $k \geq 13$. *Ekkor* (x, d, k) *az alábbiak egyike:*

$$\begin{gathered}(x, 1, k) \text{ ahol } -30 \leq x \leq -4 \text{ vagy } 1 \leq x \leq 5,\\ (x, 2, k) \text{ ahol } -29 \leq x \leq -3,\\ (-10, 3, 7), (-8, 3, 7), (-8, 3, 5), (-4, 3, 5), (-4, 3, 3), (-2, 3, 3),\\ (-9, 5, 4), (-6, 5, 4), (-16, 7, 5), (-12, 7, 5).\end{gathered}$$

Hirata-Kohno, Laishram, Shorey és Tijdeman [HKLST07] megmutatta, hogy ha $3 < k < 110$ és $b = 1$, akkor a (2) egyenletnek $n = 2$ esetén nincs megoldása. (Valójában [HKLST07] és [Te08] alapján egy ennél lényegesen pontosabb állítás is megfogalmazható, amely a $P(b) \leq k$ esetet is lefedi, bizonyos k értékek mellett.) Amint az könnyen látható, a 2. Tételünk a 3-7. Tételeink és az $n = 2$ esetre vonatkozó említett állítás következménye.

A következőkben bemutatjuk a felsorolt tételek bizonyításának hátterét. Itt is a korábbi, az n kitevő különböző értékeihez tartozó felosztást követjük. Célunk az, hogy röviden ismertessük a legfontosabb felhasznált módszereket illetve azok alkalmazásának elveit. A részletes bizonyítások a megfelelő cikkekben találhatók. Elöljáróban csupán annyit említünk meg, hogy minden vizsgált esetben sikerült olyan korábban még nem használt módszert kifejlesztenünk, mely a probléma kezelése során igen hatékonynak bizonyult.

III.1.2.1 Az $n \geq 7$ eset

Ebben az esetben az egyenlet megoldását a Wiles [W95], Darmon és Merel [DM97] Kraus [K97], Ribet [Rib97] és mások által kifejlesztett moduláris technika teszi lehetővé. Értekezésünkben nem ismertetjük a módszer elméleti hátterét, sokkal inkább annak problémánkra való (távolról sem automatikus, több szempontból is új megközelítésmódot igénylő) alkalmazására koncentrálunk. A módszer tömör felvázolása, illetve általános diofantikus alkalmazási lehetőségeinek összegzése Bennett [Ben03] ismertető dolgozatában található.

A moduláris módszer alapvetően háromféle szignatúrájú ternér egyenlet kezelését teszi lehetővé, nevezetesen az alábbiakét:

$$(n, n, n) \text{ szignatúra}: \quad AX^n + BY^n = CZ^n,$$

$$(n,n,3) \text{ szignatúra}: \quad AX^n + BY^n = CZ^3,$$
$$(n,n,2) \text{ szignatúra}: \quad AX^n + BY^n = CZ^2.$$

Itt valamennyi esetben A, B, C rögzített prímosztókkal rendelkező nemnulla egészek, X, Y, Z pedig ismeretlen relatív prím egészek. Megemlítjük, hogy $A = B = C = 1$ esetén az első egyenlet éppen a Fermat-egyenlet. Már ezen a ponton felhívjuk a figyelmet két, a későbbiekben fontos szerepet játszó összefüggésre. Egyrészt, bár elvileg a fenti típusú egyenletek kezelhetők (és itt nem feltétlenül a megoldásukra, csupán azok számítógép segítségével történő vizsgálatára gondolunk), ám a gyakorlatban csak azok az egyenletek használhatók, melyek viszonylag alacsony szintű moduláris formákhoz tartoznak - azaz tipikusan azok, melyekben ABC csupán „kevés” és „kicsi” különböző prímosztóval rendelkezik. Másrészt, az elmélet alkalmazhatóságát nagyban megkönnyíti (sőt sokszor csupán az teszi lehetővé), ha egy további információval is rendelkezünk: ismerjük az XY egy konkrét prímosztóját.

A módszer (2) egyenletre való alkalmazásának kiindulópontja a (3) összefüggés. Az alapelv (meglehetősen leegyszerűsítve) a következő: az összes (3) alakú számtani sorozatot megvizsgálva a (2) egyenlet összes megoldását megkapjuk. Ha k értéke „kicsi” (mondjuk $k \leq 11$), akkor egy meglehetősen komplikált, de alapvetően szisztematikus vizsgálat is használható - lényegében ez történt a [BBGyH06] publikációnkban. Amint azt a (6) alakú egyenletek levezetésénél láthattuk, a (2) egyenletből kiindulva (n,n,n) szignatúrájú ternér egyenletek levezetése nem okoz gondot. Az ilyen egyenletek megoldása viszont már lényegesen nagyobb nehézségekbe ütközik: összességében elmondható, hogy az irodalomban csupán néhány (n,n,n) szignatúrájú ternér egyenlet teljes megoldása szerepel; lásd például [W95], [DM97], [K97], [Rib97], [SS01]. A meglévő eredmények problémánkra jól használhatók, de önmagukban messze nem elegendőek. Viszont olyan új, (n,n,n) szignatúrájú egyenletekre vonatkozó eredményt, amely a problémánk megoldása során jól alkalmazható, nehéz levezetni. Ennek fő oka az, hogy nem tudjuk garantálni, hogy a kapott egyenletben $p \mid XY$ teljesülne valamilyen adott p prímszámmal. Az áttörést az $(n,n,2)$ szignatúrájú egyenletek alkalmazása hozza. Ilyen típusú egyenletek (3)-ból a következő módon nyerhetők. Legyen $0 \leq i_1 < i_2 \leq i_3 < i_4 < k$ úgy, hogy $i_2 + i_3 = i_1 + i_4$ teljesül. Ekkor fennáll a következő azonosság:

$$(n + i_2 d)(n + i_3 d) - (n + i_1 d)(n + i_4 d) = (i_2 i_3 - i_1 i_4) d^2.$$

Így (3) alapján egy

$$a_{i_2} a_{i_3} (x_{i_2} x_{i_3})^n - a_{i_1} a_{i_4} (x_{i_1} x_{i_4})^n = (i_2 i_3 - i_1 i_4) d^2 \tag{8}$$

alakú $(n, n, 2)$ szignatúrájú ternér egyenlethez jutunk. Az (n, n, n) szignatúrához képest a különbség abban rejlik, hogy itt már (az indexek „ügyes" megválasztásával) garantálható egy $p \mid XY$ típusú feltétel, és ezáltal a fellépő ternér egyenlet kezelhetővé válik, annak összes megoldása meghatározható.

A jelenséget egy példán keresztül illusztráljuk. Legyen $k = 4$, és vizsgáljuk a (2) egyenletet a $P(b) \leq 2$ feltétel mellett. Ekkor (3)-ban $P(a_i) \leq 3$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ teljesül. Tegyük fel, hogy $3 \mid a_0$. Ekkor persze $3 \mid x$, így $\text{lnko}(x, d) = 1$ miatt $3 \nmid d$, valamint $3 \nmid (x + d)(x + 2d)$ teljesül. Mivel $P(b) \leq 2$, így azt kapjuk, hogy 3 kitevője $x(x + 3d)$-ben szükségképpen osztható n-nel. De akkor a (8) egyenletben, $i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 2, i_4 = 3$ választás mellett 3 „beolvasztható" az $x_{i_1} x_{i_4}$ alapba, és így a fellépő ternér egyenletben végül is a $3 \mid XY$ feltételhez jutunk.

Az $(n, n, 2)$ szignatúrájú egyenletek első alkalmazására a [GyHS04] cikkünkben került sor. Itt azonban csupán az irodalomban található néhány egyenletet (lásd például [BS04]) használtuk, melyek csak a $k = 4, 5$ esetek kezelését tették lehetővé. A későbbiek során, a [BBGyH06] dolgozatban számos új, a megoldások vizsgálata során fellépő $(n, n, 2)$ szignatúrájú egyenletet megoldva lehetővé vált az eredmény kiterjesztése a $k \leq 11$ esetre. Megemlítjük, hogy a probléma $k < 35$ esetén történő vizsgálatához a [GyHP09] dolgozatunkban még több $(n, n, 2)$ szignatúrájú egyenlet megoldása vált szükségessé - erről az alábbiakban részletesebben is szólunk majd.

Az eredmény továbbviteléhez lényeges újításra volt szükség. A k értékének növelésével ugyanis meg kell birkózni a kombinatorikus robbanás jelenségével: a (3) alapján (elméletileg) fellépő számtani sorozatok száma rendkívül gyorsan növekszik. Emiatt a korábban alkalmazott szisztematikus jellegű vizsgálat a gyakorlatban már nem használható. A [GyHP09] cikkünkben a nehézségek áthidalására sziták egy egymásra épülő rendszerét dolgoztuk ki. Ennek lényege (meglehetősen leegyszerűsítve) a következő. A számtani sorozatunk tagjainak $p \leq k$ prímosztóira az $\text{lnko}(x, d) = 1$ összefüggés miatt $p \mid (x + id), (x + jd)$ esetén $p \mid j - i$ teljesül. Így ha tudjuk, hogy egy ilyen p prím oszt egy $x + id$ tagot, akkor az összes p-vel osztható tagot fel tudjuk sorolni. (Ugyanakkor a k-nál nagyobb prímszámok nyilván csak egy tagot oszthatnak, n-nel osztható kitevőn szerepelve.) Az esetek vizsgálatánál először csak az 5-nél nagyobb prímszámok „helyeit" (azaz egy velük osztható tag indexét) rögzítsük. A „kimaradó" helyek (azaz azon tagok, melyek nem rendelkeznek 5-nél nagyobb prímosztóval) segítségével megpróbálhatunk olyan (n, n, n), $(n, n, 3)$ vagy $(n, n, 2)$ szignatúrájú ternér egyenlethez jutni, melynek megoldása az irodalomban már szerepel. A fennmaradó esetekben rögzítsük az 5, majd a 3, végül a 2 „helyét" - minden esetben hasonló vizsgálatokat folytatva. Végül a még mindig kimaradó esetekben próbáljunk meg levezetni olyan ternér egyenletet, mely korábban még nem volt megoldva, de kezelhető. Ez a lépés egyfajta iterációval történik: olyan ternér egyenleteket érdemes keresni és megoldani, melyek „sok” potenciális számtani sorozat létezését zárják ki egyszerre. Az ezen egyenletek segítségével sem kizárható sorozatok esetén keressünk további, hasonló jellegű ternér egyenleteket, stb. Végül a (2) egyenlet $k \leq 34$ esetén történő megoldásához összesen 55 darab $(n, n, 2)$ szignatúrájú egyenlet megoldására került sor, mindegyik esetben egy további $p \mid XY$ ($p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$) feltétel mellett. Megemlítjük, hogy ez összesen körülbelül kétszer annyi új egyenlet megoldását jelentette, mint amennyi az általunk felhasznált irodalomban szerepelt. A módszer jellege miatt bizonyos n kitevők egy-egy konkrét ternér egyenlet megoldásánál „kimaradtak”: néhány $AX^n + BY^n = CZ^2$ alakú egyenletet sokszor csak egy $n \notin N$ feltétel mellett sikerült megoldanunk, ahol N egy véges, jellemzően „kevés” és „kicsi” elemekből álló halmaz. Az N-beli n kitevőket külön vizsgálatok segítségével (tipikusan lokális számítások alapján) sikerült kezelnünk.

Az eredmény jelentősége nem csupán annyi, hogy sikerült viszonylag nagy k értékekre is megoldani a (2) egyenletet. A bizonyítás során feltárt összefüggések reményeink szerint a későbbiekben egy még általánosabb eredmény levezetésében is fontosak lehetnek. Mivel jelenleg csupán találgatni tudunk, egyetlen konkrét tényre szeretnénk felhívni a figyelmet: a vizsgált számtani sorozatok **mindegyike** esetében sikerült alacsony szintű ternér egyenletet találnunk. E tapasztalati megfigyelés valamilyen elméleti tétel formájába való öntése rendkívül nagy jelentőséggel bírna.

III.1.2.2 Az $n = 5$ eset

Ebben az esetben mind a [BBGyH06] mind a [GyHP09] cikkeinkben eredményeink az $AX^5 + BY^5 = CZ^5$ alakú egyenletekre vonatkozó tételeken alapulnak. Így többek között felhasználtuk Dirichlet, Lebesgue, Maillet (lásd [Di66]) és Dénes [De52] klasszikus eredményeit az $A = B = 1$ esetben, illetve Saradha és Shorey [SS01] bizonyos tételeit $C = 1$ esetén. Ezeken túl több új eredmény levezetésére is szükségünk volt. Kiterjesztettük például Dirichlet és Dénes említett eredményeit a $P(C) \leq 7$ esetre (a korábbiakban csupán a $P(C) \leq 3$ esetekkel foglalkoztak). Eredményeinket klasszikus algebrai számelméleti eszközök kombinálásával, valamint lokális vizsgálatok segítségével bizonyítottuk. A részletek a [BBGyH06], [GyHP09] cikkeinkben találhatók.

III.1.2.3 Az $n = 3$ eset

Viszonylag kis k értékek esetén (azaz mondjuk $k \leq 11$ mellett) (3) alapján az esetek szisztematikus vizsgálata is célravezető volt (lásd [BBGyH06]). A szükséges hátteret Selmer [Se51] $AX^3 + BY^3 = CZ^3$ alakú egyenletekre vonatkozó eredményei, valamint a már említett Chabauty-módszer szolgáltatja. Nagyobb k értékekre azonban a fellépő esetek hatalmas száma miatt finomabb meggondolásokra van szükség. Ezért a [HTT09] cikkünkben bevezettünk egy modulo 7 és modulo 9 köbmaradékokon alapuló szitamódszert, amely jelentős mértékben megkönnyíti az esetek vizsgálatát. A fennmaradó lehetséges számtani sorozatokat Selmer [Se51] már említett eredményeivel, illetve a Cahabauty-módszerrel kezeltük. Az előbbi eszköz alkalmazása (3) alapján kézenfekvő, az utóbbi használatát egy példán illusztráljuk. Tegyük fel, hogy $k = 7$ és (3)-ban

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (4, 5, 6, 7, 1, 9, 10)$$

teljesül. Mivel egy számtani sorozattal van dolgunk, így a

$$8x_6^3 + x_1^3 = 9x_5^3 \quad \text{és} \quad x_6^3 - 3x_1^3 = -2x_0^3$$

összefüggésekhez jutunk. Az első egyenletet faktorizálva könnyen látható, hogy $4x_6^2 - 2x_1x_6 + x_1^2 = 3u^2$ teljesül valamilyen u egésszel. A második egyenlet bal oldalát a $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ testben faktorizálva $x_6 - \sqrt[3]{3}x_1 = (1 - \sqrt[3]{3})v^3$ adódik, valamilyen K-beli v algebrai egésszel. A fenti összefüggésekből az

$$(X - \sqrt[3]{3})(4X^2 - 2X + 1) = (3 - 3\sqrt[3]{3})Y^3$$

egyenlethez jutunk, ahol $X = x_6/x_1$ illetve $Y = uv/x_1$. Mivel ez az egyenlet egy K feletti 1 génuszú görbét határoz meg, így ennek $(X, Y) \in \mathbb{Q} \times K$ megoldásai az elliptikus Chabauty-módszer segítségével meghatározhatók. Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy a megoldások az $x_1 = \pm 1$, $x_6 = \pm 1$ értékekhez tartoznak. A módszer részletesebb leírását lásd a [BBGyH06] és [HTT09] cikkeinkben.

III.1.2.4 Az $n = 2$ eset

Ebben az esetben a (3) egyenlet vizsgálatának egyik hatékony eszközét az elliptikus egyenletek jelentik. Mivel azonban most d nem rögzített, így a korábban [FH01]-ben alkalmazott technikánk átalakítására van szükség. Ennek a [BBGyH06] cikkünkben bevezetett új eljárásnak a bemutatásához válasszunk négy tagot a szóban forgó számtani sorozatból. Ekkor (3) alapján

$$X(X + j_1d)(X + j_2d)(X + j_3d) = BY^2$$

adódik. Itt (ha az i_1, i_2, i_3, i_4 indexű tagokat választottuk) $j_l = i_{l+1} - i_1$ ($l = 1, 2, 3$) és $X = x + i_1d$, illetve $B = a_1a_2a_3a_4$ valamint $Y = x_1x_2x_3x_4$ teljesül.

Innen, felhasználva hogy $X \neq 0$, az $u = d/x$ és $v = Y/X^2$ helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$(1 + j_1u)(1 + j_2u)(1 + j_3u) = Bv^2,$$

ami egy elliptikus egyenlet. A probléma az, hogy itt u, v **racionális** számok lehetnek, így az egyenlet akár végtelen sok megoldással is rendelkezhet. Viszont ha az egyenlet (pontosabban a hozzá tartozó elliptikus görbe) Mordell-Weil csoportjának rangja nulla (amire a terület egy „folklór" sejtése alapján egy véletlenszerűen választott görbe esetében mintegy 40 százalék „esély" van), akkor a megoldások száma véges. Ezek a megoldások a görbe Mordell-Weil csoportjának torziópontjaihoz tartoznak, és standard matematikai programcsomagok (például a MAGMA [BCP97]) segítségével egyszerűen meghatározhatók. Így ebben az esetben a (2) egyenlet megoldásai is könnyen adódnak. A problémát elsősorban a potenciálisan fellépő (3) sorozatok (k értékével rendkívül gyorsan növekvő) nagy száma jelenti. Ez a nehézség azonban a megfelelő szitatechnikákkal, legalábbis $k \leq 11$ esetén, a [BBGyH06] cikkünkben kezelhetőnek bizonyult. Érdekes módon egy konkrét esetben, nevezetesen $k = 6$ és $b = 5$ mellett valamennyi fellépő elliptikus görbe rangja pozitív. Ekkor az alábbi egyenlethez jutunk:

$$X(X + 1)(X + 2)(X + 3)(X + 4)(X + 5) = 5Y^2,$$

ahol $X = x/d$ és $Y = y/d^3$. A fenti egyenlet egy 2 génuszú görbét határoz meg, melynek racionális pontjai (és így visszahelyettesítés után x, y, d értéke) a Chabauty-módszer segítségével meghatározható. Ezt az eredményt az iménti eljárással kombinálva a 3. Tétel $n = 2$ esetén történő bizonyításához jutunk.

Végül megemlítjük, hogy az említett [HKLST07]-beli eredmény bizonyítása részben más módszerrel (egy lokális megfontolásokon alapuló eljárással és a Chabauty-módszer segítségével) történt, mely elsősorban az $x > 0$ megoldások meghatározásakor tűnik hatékonynak, lásd a [HKLST07] és [Te08] cikkeket. (Valóban, az $x < 0$ esetet [HKLST07] nem tárgyalja.)

III.2 Számtani sorozatot alkotó vegyes hatványok

A (2) egyenlettel kapcsolatos eredmények (3) alapján úgy is interpretálhatóak, hogy olyan számtani sorozatokat keresünk, melyek „majdnem" teljes n-edik hatványokból állnak. Ebben a fejezetben egy általunk nyitott, de számos korábbi híres problémához és eredményhez kapcsolódó kutatási irányban nyert eredményeket mutatunk be. Tekintsük az

$$a_0x_0^{n_0}, a_1x_1^{n_1}, \ldots, a_{k-1}x_{k-1}^{n_{k-1}} \tag{9}$$

alakú számtani sorozatokat. Itt $a_i, x_i \in \mathbb{Z}$, $P(a_i) \leq P$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ ahol P egy rögzített konstans, és az $n_i \geq 2$ hatványkitevők különbözőek is lehetnek. Az alapkérdés a következő: bizonyos természetes feltételek mellett korlátozható-e a (9) sorozat k hossza? Megemlítjük, hogy könnyen látható, hogy feltételek előírása nélkül k értéke nem korlátozható. Ezt az alábbi egyszerű példa segítségével illusztráljuk (mely a disszertációban is bemutatott [H04]-ben található). Két tetszőleges különböző $x_0^{n_0}$, $x_1^{n_1}$ teljes hatvány felfogható kéttagú számtani sorozatként. Induktívan gondolkodva tegyük fel, hogy

$$x_0^{n_0}, x_1^{n_1}, \ldots, x_{t-1}^{n_{t-1}}$$

egy t tagú számtani sorozat, valamilyen $t \geq 2$ mellett. Legyen $y = x_{t-1}^{n_{t-1}} + d$, ahol $d = x_1^{n_1} - x_0^{n_0}$ a sorozat differenciája. Vegyük észre, hogy ekkor az $N = n_0 \ldots n_{t-1}$ és $N_i = N/n_i$ $(i = 0, 1, \ldots, t-1)$ jelöléseket bevezetve

$$(x_0 y^{N_0})^{n_0}, (x_1 y^{N_1})^{n_1}, \ldots, (x_{t-1} y^{N_{t-1}})^{n_{t-1}}, y^{N+1}$$

egy teljes hatványokból álló $t+1$ tagú számtani sorozat. Így k értéke valóban nem korlátozható.

Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, az n_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ kitevők illetve $\mathrm{lnko}(a_0 x_0, a_1 x_1)$ korlátozása esetén a helyzet merőben más jelleget ölt. Az eredmények bemutatása előtt azonban még szeretnénk rávilágítani két dologra. Egyrészt, a probléma nyilvánvalóan a homogén hatványok esetének egyfajta általánosításának tekinthető. A vegyes hatványokból álló számtani sorozatok problémaköre ugyanakkor lényegesen nehezebb az azonos hatványok eseténél. Ezt jól illusztrálja, hogy az itt használható egyik mély eszköz a (6)-hoz képest is jelentősen tovább általánosított Fermat-egyenletek, azaz az

$$AX^p + BY^q = CZ^r \tag{10}$$

alakú egyenletek elmélete, ahol A, B, C nemnulla egészek. A (10) alakú egyenletekre vonatkozó jelenlegi legjobb, Darmontól és Granville-től [DG95] származó eredmény azonban csupán rögzített p, q, r esetén (a szokásos $1/p + 1/q + 1/r > 1$ feltétel mellett) biztosít végességet, ráadásul csak ineffektív formában. (Szemben a már korábban említett, például (6)-ra vonatkozó eredményekkel, melyek tetszőleges n-re érvényesek.)

Másrészt, a nevezetes

$$X^p - Y^q = 1$$

Catalan-egyenlet megoldásai lényegében egy kettő hosszúságú, $d = 1$ differenciájú „vegyes" hatványokból álló számtani sorozatot alkotnak, így a felvetett probléma ehhez az egyenlethez is szorosan kapcsolódik. (A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy a Catalan-egyenlet Tijdeman [Ti76b] egy tétele alapján csak véges sok, effektíve meghatározható megoldással rendelkezik. Az egyenlet teljes megoldása Mihăilescu [Mi04] nevéhez fűződik. Az egyetlen megoldás: $(X, Y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$.)

Ebben a témakörben lényegében két különböző kutatási irány kezd körvonalazódni: a bizonyos feltételek mellett k-ra (illetve esetlegesen a sorozatok **számára**) vonatkozó korlátok levezetése, valamint bizonyos speciális esetekben az összes megfelelő tulajdonságú sorozat meghatározása. Először az első irányba sorolható eredményeinket mutatjuk be.

8. Tétel. ([H04]) *Legyen L egy rögzített egész, $L \geq 2$. Ekkor bármely olyan* (9) *alakú számtani sorozatra melyben $n_i \leq L$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, $k \leq C(P, L)$ teljesül, ahol $C(P, L)$ egy csak P és L értékétől függő konstans.*

Tételünk bizonyítása során többek között van der Waerden [vdW27] egy híres (ilyen típusú probléma vonatkozásában korábban nem alkalmazott), monokromatikus számtani sorozatokra vonatkozó tételét, illetve Euler valamint Darmon és Merel korábban említett eredményeit kombináltuk.

Megemlítjük, hogy [H04]-ben megmutattuk, hogy az abc-sejtés teljesülése esetén az $n_i \leq L$ feltételt az $\mathrm{lnko}(a_0x_0, a_1x_1) = 1$ feltétellel helyettesítve, k a P egy függvénye segítségével korlátozható. Ezen a ponton célszerűnek tűnik az abc-sejtés pontos ismertetése. A sejtés szerint tetszőleges relatív prím pozitív egész a, b, c számok és ε pozitív valós szám esetén az $a + b = c$ összefüggésből

$$c \leq C(\varepsilon) \left(\prod_{p \mid abc} p \right)^{1+\varepsilon}$$

következik, ahol $C(\varepsilon)$ egy csupán ε-tól függő konstans. A sejtés egy gyengébb alakja Oesterlétől [Oe88] származik, fenti formájában először Masser [Mas85] fogalmazta meg. Az abc sejtésből rengeteg fontos eredmény levezethető, több vezető szaktekintély szerint a modern diofantikus számelmélet egyik legfontosabb sejtéséről van szó. Itt csupán az érdekesség kedvéért azt említjük meg, hogy egy [GyHS04]-beli eredményünk alapján az abc-sejtés fennállása esetén $k \geq 3$ és $n \geq 4$ mellett a (2) egyenlet csupán véges sok x, d, k, b, y, n megoldással rendelkezik (azaz itt minden további feltétel nélkül az **összes** paraméter korlátozható).

9. Tétel. ([BGyHT06]) *Legyen L egy rögzített egész, $L \geq 2$. Ekkor csak véges sok olyan* (10) *alakú számtani sorozat létezik, melyre $n_i \leq L$, $a_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ és $\mathrm{lnko}(x_0, x_1) = 1$ teljesül.*

E tételünk bizonyításában új eszközt jelent Darmon és Granville fent említett, az általánosított Fermat-egyenletre vonatkozó tétele. Megemlítjük, hogy a [BGyHT06] dolgozatban a 9. Tételt bizonyos egyéb feltételek mellett sikerült tetszőleges a_i együtthatók esetére is kiterjesztenünk.

A fentieken túl olyan eredményeket is sikerült nyernünk, melyek szerint egy (9) típusú számtani sorozat hossza a sorozat (lényegében) bármely tagjának ismeretében, illetve a d differencia segítségével is korlátozható.

10. Tétel. ([H08]) *Legyenek x és n olyan egészek, melyekre $|x| \geq 2$ és $n \geq 2$ teljesül. Ekkor létezik egy olyan, csak x és n értékétől függő $C(x, n)$ konstans, hogy bármely nemkonstans, x^n-et tartalmazó teljes hatványokból álló számtani sorozat hossza legfeljebb $C(x, n)$.*

A bizonyítás során a 8. Tételt különböző elemi aritmetikai megfontolásokkal kombináltuk. Megemlítjük, hogy a 10. Tételben az $x \neq 0$ feltétel szükséges, ugyanakkor $x = \pm 1$ esetén a probléma nyitott marad.

11. Tétel. ([H08]) *Tekintsünk egy olyan (9) alakú számtani sorozatot, ahol $a_i = 1$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Jelölje d a sorozat differenciáját. Ekkor mindkét alábbi összefüggés fennáll:*

i) $k \leq \max(3.125 \log(d) - 1, 73)$,

ii) $k \leq \max(2(\omega(d) + 1)(\log(\omega(d) + 1) + \log\log(\omega(d) + 1)) - 1, 21)$,

ahol $\omega(d)$ a d különböző prímosztóinak száma.

Az utóbbi tétel jelentőségét és érdekességét a következő összefüggés mutatja. Mint azt már korábban említettük, a (2) egyenlettel kapcsolatos egyik legfontosabb kutatási irány a következő: rögzített d esetén korlátozzuk a többi ismeretlent! Shorey és Tijdeman [ShTi90] egy eredménye alapján bármely n esetén k egy csupán $\omega(d)$ értékétől függő konstans segítségével korlátozható. Bár (3) alapján itt a számtani sorozat tagjai csupán „majdnem” teljes hatványok, látható, hogy a 11. Tétel ezen eredmény egyfajta kiterjesztését jelenti a „vegyes” hatványok esetére.

A következőkben két olyan eredményünket ismertetjük, melyek bizonyos speciális, de érdekes esetekben az összes (9) alakú számtani sorozatot meghatározzák.

12. Tétel. ([BGyHT06]) *Tegyük fel, hogy egy (9) alakú számtani sorozatra $k \geq 4$, lnko$(x_0, x_1) = 1$, $a_i = 1$ és $n_i \in \{2, 3\}$ teljesül minden $i = 0, 1, \ldots, k-1$ esetén. Ekkor a sorozat a triviális $1, 1, \ldots, 1$ és $-1, -1, \ldots, -1$ sorozatok egyike.*

Ez az eredmény az Euler és Fermat valamint Mordell már említett, négyzetszámokból illetve köbszámokból álló számtani sorozatokról szóló tételeinek közös általánosítását jelenti. Az eredmény igazolásának fő eszközét a 2 génuszú görbék elmélete, illetve a Chabauty-módszer valamint ennek elliptikus változata adja. Megemlítjük, hogy a (disszertációban nem szereplő) [HT] dolgozatban bizonyos feltételek mellett az $n_i \in \{2, n\}$, $n_i \in \{3, n\}$, illetve $n_i \in \{2, 5\}$ eseteket is kezelni tudtuk.

A fejezet utolsó eredményeként egy speciális sorozattal kapcsolatos tételt mutatunk be. Ehhez szükségünk van egy új fogalom bevezetésére. Egy

$$x_1^1, x_2^2, \dots, x_i^i, \dots$$

alakú számtani sorozatot hatványgazdag (első irodalombeli megjelenése alapján angolul kicsit félrevezetően „powerful") számtani sorozatnak nevezünk. Ha $\mathrm{lnko}(x_1, x_2) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat primitív. Boklan [Bo98] problémafelvetése után Robertson, illetve tőle függetlenül Elkies és mások (lásd [Ro00]) megmutatták, hogy egy hatványgazdag számtani sorozat hossza legfeljebb öt. Az alábbi eredmény ennél lényegesen pontosabb eredményt szolgáltat.

13. Tétel. ([H08]) *Az egyetlen öttagú primitív hatványgazdag számtani sorozat a triviális* $1, 1, 1, 1, 1$ *sorozat. Ugyanakkor végtelen sok öttagú nemprimitív hatványgazdag számtani sorozat létezik.*

A fenti tételen túl a [H08] dolgozatban a hatványgazdag számtani sorozatok lehetséges hosszainak teljes karakterizációját is elvégeztük.

III.3 Számtani sorozatok S-egységek összeghalmazaiban

A számelmélet számos fontos területén rendkívüli jelentőséggel bírnak bizonyos multiplikatív csoport vagy részcsoport elemeire vonatkozó lineáris egyenletek. (Az érdekesség kedvéért itt például megemlíthetjük az ikerprím problémát.) A diofantikus egyenletek területén a legfontosabb egyenletosztályok egyikét az S-egység egyenletek alkotják. Ezek bemutatásához szükségünk van néhány jelölés bevezetésére. Megjegyezzük, hogy az egyszerűbb bemutathatóság kedvéért a szokásoshoz képest itt egy kissé leegyszerűsített jelölés- és fogalomrendszert használunk.

Legyen $\mathbb{K}$ egy algebrai számtest, $O_{\mathbb{K}}$ a $\mathbb{K}$-beli algebrai egészek gyűrűje, S pedig az $O_{\mathbb{K}}$ prímideáljainak egy véges halmaza. Ha $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy az $O_{\mathbb{K}}$ bármely S-en kívüli P prímideálja esetén $\mathrm{ord}_P(\alpha) = 0$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy α egy S-egység. (Itt $\mathrm{ord}_P(\alpha)$ a P kietvője az (α) törtideál faktorizációjában.) Jelölje U_S a $\mathbb{K}$-beli S-egységek halmazát, legyenek $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(n \geq 2)$ $\mathbb{K}$-beli nemnulla elemek, és tekintsük az

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = a_0 \tag{11}$$

alakú, úgynevezett S-egység egyenletet, ahol $x_1, \dots, x_n \in U_S$ ismeretlenek. Az egyenlet egy $(x_1, \dots, x_n)$ megoldását nemelfajulónak nevezzük, ha $a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_t} x_{i_t}$ az $\{1, \dots, n\}$ halmaz egyetlen $\{i_1, \dots, i_t\}$ részhalmaza esetében sem nulla.

A (11) alakú egyenletek a diofantikus egyenletek elméletében igen fontos szerepet játszanak. Ennek oka részben az a kiemelkedően fontos összefüggés, hogy a széteső forma egyenletek (többek között a norma forma egyenletek, a Thue-egyenletek, a diszkriminláns forma egyenletek, az index forma egyenletek) visszavezethetők S-egység egyenletekre; lásd például [Gy80], [EGy85], [EGy88a], [EGy88b], [EGyST88]. Emellett sok más klasszikus, központi diofantikus probléma direkt módon egységegyenletek megoldására vezet; az [EGyST88] és [Gy92] dolgozatokban számos ilyen alkalmazás található. Mivel mi elsősorban nem egy konkrét (11) egyenlet megoldására koncentrálunk, így ehelyütt csupán a tárgyalás szempontjából legfontosabb végességi eredményekről szólunk. Mély diofantikus approximációelméleti eszközök felhasználásával megmutatható, hogy (11) bármely rögzített $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ esetén csupán véges sok nemelfajuló megoldással rendelkezik; az első ilyen jellegű, az $n = 2$ esetre vonatkozó eredmény Siegel [Si21] nevéhez köthető. Ezen túl (a Schmidt-féle altér tétel segítségével) (11) megoldásszáma is korlátozható. Az általunk a későbbiekben használandó, jelenleg ismert legáltalánosabb becslés Evertse, Schlickewei és Schmidt [ESS02] nevéhez fűződik, mely szerint (11) nemelfajuló megoldásainak száma egy csupán S elemszámától és n-től függő (a konkrét együtthatóktól független!) explicit értékkel korlátozható. (Megjegyezzük, hogy újabban ezt az eredményt Amoroso és Viada [AV] egy közlés alatt álló dolgozatban élesítette.) Mivel a témakör irodalma rendkívül gazdag és szerteágazó, ugyanakkor tárgyalásunkhoz az említett [ESS02]-beli korlát elégséges, így a kapcsolódó eredményekért csak az [ShTi86], [EGyST88], [Gy92], [ESS02], [AV] munkákra, illetve a bennük található megfelelő hivatkozásokra utalunk. Megemlítjük még, hogy $n = 2$ esetén a Baker-módszer segítségével maguk az x_1, x_2 megoldások (pontosabban azok magassága) is korlátozható. Mivel ebbe az irányba nem teszünk lépéseket, így csak a [Gy79], [ShTi86], [EGyST88], [Gy92], [BGy96], [Gy02], [GyY06] publikációkban található eredményekre és hivatkozásokra utalunk.

Az általunk vizsgált problémakör lényegében a (11) jobboldalán lehetséges értékként fellépő (azaz S-egységek n-tagú, adott K-beli együtthatókkal képzett lineáris kombinációiként előálló) a_0 számokból álló halmaz szerkezetére, aritmetikai tulajdonságaira vonatkozik. Már ezen a ponton megemlítjük, hogy alaperedményünk több, egymástól látszólag teljesen független diofantikus probléma esetén is fontos alkalmazást nyert.

Jelölje H a (11) egyenlet jobboldalán lehetséges értékként fellépő a_0 számokból álló halmazt; pontosabban H az U_S elemeinek összes, adott $a_1, \ldots, a_n$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációiból áll. A H halmaz szerkezetét, tulajdonságait többen, több szempontból vizsgálták. Győry, Mignotte és Shorey [GyMS90] (több más eredmény mellett) kvantitatív formában igazolta, hogy ha $a_0 \in H$ és $N_S(a_0)$ (a_0 úgynevezett S-normája) „elég nagy”, akkor egyrészt $N_S(a_0)$ nem rendelkezhet csupa „kicsi" prímtényezővel, másrészt $N_S(a_0)$ négyzetmentes része sem lehet „kicsi". Ezen túl, Everest [grE89] bizonyos feltételek mellett aszimptotikus formulát is nyert azon H-beli elemek számára, melyek S-normája egy adott korlát alatt marad. Az utóbbi eredményt (a jelen disszertációban nem szereplő) [AHL09] publikációnkban sikerült pontosítanunk. Mivel ezek az eredmények csak érintőlegesen kapcsolódnak az általunk vizsgált irányhoz, így azokat részletesen nem ismertetjük.

Tárgyalásunk fő csapását a H halmazban található számtani sorozatok vizsgálata jelenti. A következőkben megfogalmazzuk ez irányú alaperedményünket. Ehhez szükség van néhány jelölés bevezetésére. Valójában a fenti jelölések felhasználásával már megfogalmazhatnánk tételünk egy leegyszerűsített változatát, ám az irodalommal való minél pontosabb összevetés érdekében érdemesnek tűnik az eredmény precíz ismertetése.

Legyen K egy nullkarakterisztikájú, algebrailag zárt test. Jelölje K^* a K nemnulla elemei alkotta multiplikatív csoportot, és legyen Γ a K^* egy r (véges) rangú multiplikatív részcsoportja. Legyen továbbá t egy pozitív egész, és legyen $\mathcal{A}$ a K^t egy n-elemű (véges) részhalmaza. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$H_t(\Gamma, \mathcal{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} a_i x_i : (a_1, \ldots, a_t) \in \mathcal{A},\ (x_1, \ldots, x_t) \in \Gamma^t \right\}.$$

Ezen a területen a bemutatni kívánt „alaperedményünk" a következő.

14. Tétel. ([H07]) *Létezik egy olyan, csak r, t, n értékétől függő $C(r, t, n)$ konstans, hogy bármely $H_t(\Gamma, \mathcal{A})$-beli nemkonstans számtani sorozat hossza legfeljebb $C(r, t, n)$.*

Jól ismert, hogy U_S végesen generált (multiplikatív) csoport. Így a korábbi jelölésekkel, K-t és Γ-t a megfelelő $\mathbb{K}$ algebrai számtestnek illetve U_S S-egység csoportnak választva eredményünk közvetlen következményeként a H halmazban található nemkonstans számtani sorozatok hossza is korlátozható.

Megemlítjük, hogy a $C(r, t, n)$ korlátban mindhárom paraméter jelenléte szükséges, továbbá, hogy a konstanst [AHL09]-ben explicit alakban is megadtuk. Azt is megjegyezzük, hogy a tekintett tulajdonságú sorozatok **száma** nem korlátozható. Eredményünk bizonyítása a korábban említett, (11)-re vonatkozó [ESS02]-beli végességi tételen (végső soron a Schmidt-féle altértételen), valamint van der Waerden [vdW27] már idézett klasszikus eredményén múlik.

Tőlünk függetlenül Jarden és Narkiewicz [JN07] szintén levezettek egy, a 14. Tételhez hasonló eredményt. A mi eredményünk azonban lényegesen általánosabb és pontosabb: Jarden és Narkiewicz eredményében egyrészt Γ egy végesen generált integritási tartomány egységcsoportjának választandó, másrészt (és az alkalmazások szempontjából ez különösen fontos különbégnek tűnik) állításuk csupán az $\mathcal{A} = \{(1, \ldots, 1)\}$ esetre vonatkozik. Amint látni fogjuk, az utóbbi különbség alapján a mi eredményünk valóban általánosabb alkalmazásokhoz vezet.

Az alábbiakban a 14. Tétel három, látszólag teljesen különböző gyökerű problémára vonatkozó alkalmazását mutatjuk be.

M. Pohst [Po06] vetette fel a következő kérdést: igaz-e, hogy minden prímszám előáll egy kettőhatvány és egy háromhatvány összegeként vagy különbségeként? A kérdés nyilvánvalóan rengeteg, a prímszámok halmazára vonatkozó problémával rokon. A kapcsolódó irodalom akárcsak hozzávetőleges feltérképezése is reménytelen vállalkozásnak tűnik, így arra kísérletet sem teszünk. A [H07] dolgozatban Pohst problémáját sikerült lényegesen általánosabb alakban megoldanunk. Ennek bemutatásához legyen most $K = \mathbb{Q}$. Egy racionális prímszámokból álló véges S halmaz esetén jelölje $\mathbb{Z}_S$ azon egészek halmazát, melyek nem oszthatók S-en kívüli prímszámmal. Végül, legyen t egy adott pozitív egész, és legyen A a $\mathbb{Z}^t$ egy véges részhalmaza. Ekkor a következő állítás igaz.

15. Tétel. **([H07])** *Bármely fenti alakú S, t, A esetén végtelen sok olyan prímszám létezik, amely nem áll elő $\sum_{i=1}^{t} a_i x_i$ alakban, ahol $(a_1, \ldots, a_t) \in A$ és $x_1, \ldots, x_t \in \mathbb{Z}_S$.*

A fenti tétel lényegében a 14. Tétel valamint Green és Tao [GT08] azon ünnepelt eredményének következménye, mely szerint a prímszámok körében tetszőleges (véges) hosszúságú számtani sorozat található. Amint az az

$$S = \{2, 3\}, \quad t = 2, \quad A = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

választásokkal azonnal látható, a 15. Tétel azonnali negatív választ szolgáltat Pohst fenti kérdésére.

A 14. Tétel egy másik alkalmazásaként végességi eredményt nyertünk norma forma egyenletek megoldáshalmazaiban található számtani sorozatokkal kapcsolatban [BHP]. A különböző típusú diofantikus egyenletek megoldáshalmaza szerkezetének vizsgálata a diofantikus számelmélet klasszikus területei közé tartozik. Számos ilyen irányú eredmény ismert már a szétesű forma egyenletek vonatkozásában is. Eredményünk, valamint a kapcsolódó irodalom bemutatáshoz szükségünk van néhány jelölés bevezetésére.

Legyen $\mathbb{K}$ egy k-ad fokú algebrai számtest, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ pedig $\mathbb{Q}$ felett lineárisan független elemek. Jelölje $D \in \mathbb{Z}$ az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ számok közös nevezőjét, és legyen $\beta_i = D\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor persze $\beta_1, \ldots, \beta_n$ $\mathbb{K}$-beli algebrai egészek. Legyen m egy tetszőleges nemnulla egész szám, és tekintsük az alábbi (úgynevezett norma forma) egyenletet

$$N_{K/\mathbb{Q}}(x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n) = m, \tag{12}$$

ahol $x_1, \ldots, x_n$ ismeretlen egészek. Legyen most H a (12) egyenlet megoldáshalmaza, $|H|$ pedig H elemszáma. Jól ismert klasszikus eredmény (lásd például [Sc72]), hogy ha az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elemek által generált $\mathbb{Z}$-modulus tartalmaz olyan részmodulust, mely teljes a $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ számtest egy $\mathbb{Q}$-tól és a képzetes másodfokú számtestektől különböző valamely részteste felett, akkor (12) végtelen sok megoldással is rendelkezhet.

A H halmaz aritmetikai tulajdonságait többen, több szempontból vizsgálták. Az $n = 2$ esetben, bizonyos további feltételek mellett Pethő [Pe82] illetve Shorey és Stewart [ShSt83] egymástól függetlenül megmutatták, hogy (12) megoldásainak koordinátái között csak véges sok teljes hatvány szerepelhet, és ezek effektív módon meghatározhatók. Evertse és Győry [EGy97], illetve Everest és Győry [grEGy05] általános széteső forma egyenletek esetén (bizonyos egyéb feltételek mellett) egyrészt aszimptotikus formulákat nyertek a korlátos magasságú megoldások számára, illetve kvantitatív formában megmutatták, hogy ha egy megoldás x_i koordinátája „elég nagy”, akkor x_i szükségképpen rendelkezik „nagy” prímosztóval.

Új kutatási irányként Pethő és társszerzői a közelmúltban számos olyan eredményt nyertek, melyek két, a H-beli elemek koordinátáiban található számtani sorozatokra vonatkozó problémával kapcsolatosak. A „vízszintes” probléma a következő módon fogalmazható meg: hány olyan H-beli elem van, melynek koordinátái számtani sorozatot alkotnak? Ebben az irányban több érdekes effektív és numerikus végességi eredmény is született, például Bérczes és Pethő [BP04], [BP06], Bérczes, Pethő és Ziegler [BPZ06] valamint Bazsó [Bazs07] tollából. Mi most az alábbi „függőleges” problémára koncentrálunk: létezik-e a H-beli elemek valamelyik koordinátájában tetszőleges hosszúságú számtani sorozat? E kérdést a kvadratikus esetben (amikoris (12) egy Pell-egyenlet) Pethő és Ziegler [PZ08] megválaszolta: megmutatták, hogy az ilyen típusú sorozatok hossza effektív módon korlátozható (lásd még [DPT08]). Az általuk kifejlesztett módszer azonban a magasabbfokú esetben nem használható. A 14. Tétel alkalmazásával ugyanakkor lehetőség nyílik az alábbi általános végességi eredmény igazolására.

16. Tétel. ([BHP]) *Legyen* $(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, t)$ *egy* H*-beli sorozat, melyre* $x_i^{(j)}$ *egy nemkonstans számtani sorozat valamilyen* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén. Ekkor* $t \leq C(k, m, D)$ *teljesül, ahol* $C(k, m, D)$ *egy, csak* k, m, D *értékétől függő explicit módon meghatározható konstans.*

Megemlítjük, hogy a [BHP] dolgozatban több más eredmény is született; sikerült például a konstans számtani sorozatok esetét is kezelnünk. A 16.

Tétel bizonyításának egyik legfontosabb lépését a 14. Tétel alkalmazása jelenti.

A 14. Tétel harmadik bemutatandó alkalmazása az irodalomban a „unit sum number" néven ismert problémával kapcsolatos. Az alapprobléma a következő: adott R egységelemes gyűrű esetén döntsük el, létezik-e egy olyan t egész szám, hogy R valamennyi eleme előáll legfeljebb t számú R-beli egység összegeként. Az első ilyen jellegű kérdést 55 évvel ezelőtt Zelinsky [Ze54] vetette fel, bizonyos endomorfizmus-gyűrűkkel kapcsolatban. Később a kiinduló problémát többen általánosították, míg végül a fent megfogalmazott alakját Goldsmith, Pabst és Scott [GPS98] cikkében érte el. Ashrafi és Vámos [AV05]-ben a másod- és harmadfokú algebrai számtestek egészeinek gyűrűje esetén, valamint bizonyos körosztási testek vonatkozásában a kérdésre negatív választ adott. Végül, a probléma algebrai számtestekben való egyfajta lezárásaként Jarden és Narkiewicz [JN07] az alábbi általános tételt nyerte.

Tétel (Jarden és Narkiewicz, [JN07]) *Legyen R egy végesen generált nullkarakterisztikájú integritási tartomány. Ekkor minden t természetes számhoz található olyan R-beli elem, amely nem áll elő legfeljebb t számú R-beli egység összegeként.*

A fenti tétel a 14. Tételhez hasonló (bár annál speciálisabb) [JN07]-beli eredmény triviális következménye. Csupán az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy valójában a 14. Tételből az alábbi élesebb (még nem publikált) következmény automatikusan adódik.

A 14. Tétel következménye. *Legyen R egy végesen generált nullkarakterisztikájú integritási tartomány. Ekkor bármely t természetes számhoz és R^t bármely véges A részhalmazához található olyan R-beli elem, mely nem áll elő*

$$\sum_{i=1}^{t} a_i x_i \quad ((a_1, \dots, a_t) \in A,\ x_1, \dots, x_t \text{ } R\text{-beli egység}) \tag{13}$$

alakban.

Mivel itt $a_i = 0$ is megengedett, a fenti következmény valóban Jarden és Narkiewicz tételének élesítése. Ugyanakkor az állítás valóban a 14. Tétel egyszerű következménye. Ennek igazolásához csupán azt kell észrevennünk, hogy tetszőleges nemnulla R-beli α elem esetén $\alpha, 2\alpha, \dots, k\alpha$ számok számtani sorozatot alkotnak. Így ha k „elég nagy", akkor a 14. Tétel miatt ezen elemek mindegyike nem állhat elő (13) alakban.

Hivatkozások

[AHL09] Zs. Ádám, L. Hajdu and F. Luca, *Representing integers as linear combinations of S-units*, Acta Arith. **138** (2009), 101–107.

[AV] F. Amoroso and E. Viada, *Small points on rational subvarieties of tori*, (közlésre benyújtva).

[AV05] N. Ashrafi and P. Vámos, *On the unit sum number of some rings*, The Quarterly Journal of Mathematics **56** (2005), 1–12.

[Bak68a] A. Baker, *Contributions to the theory of diophantine equations*, Phil. Trans. R. Soc. London **263** (1968), 173–208.

[Bak68b] A. Baker, *The diophantine equation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$*, J. London Math. Soc. **43** (1968), 1–9.

[Bazs07] A. Bazsó, *Further computational experiences on norm form equations with solutions forming arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **71** (2007), 489–497.

[BBGyP] A. Bazsó, A. Bérczes, K. Győry and Á. Pintér, *On the resolution of equations $Ax^n - By^n = C$ in integers x, y and $n \geq 3$ II*, Publ. Math. Debrecen (közlésre elfogadva).

[Ben03] M. A. Bennett, *Recipes for ternary Diophantine equations of signature (p, p, k)*, Proc. RIMS Kokyuroku (Kyoto) **1319** (2003), 51–55.

[BBGyH06] M. Bennett, N. Bruin, K. Győry and L. Hajdu, *Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. **92** (2006), 273–306.

[BGyMP06] M. A. Bennett, K. Győry, M. Mignotte and Á. Pintér, *Binomial Thue equations and polynomial powers*, Compositio Math. **142** (2006), 1103–1121.

[BS04] M. A Bennett and C. Skinner, *Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms*, Canad. J. Math. **56** (2004), 23–54.

[BVY04] M. A. Bennett, V. Vatsal and S. Yazdani, *Ternary Diophantine equations of signature $(p, p, 3)$*, Compositio Math. **140** (2004), 1399–1416.

[BHP] A. Bérczes, L. Hajdu and A. Pethő, *Arithmetic progressions in the solution sets of norm form equations*, Rocky Mountain J. Math. (közlésre elfogadva).

[BP04] A. Bérczes and A. Pethő, *On norm form equations with solutions forming arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 281–290.

[BP06] A. Bérczes and A. Pethő, *Computational experiences on norm form equations with solutions forming arithmetic progressions*, Glasnik Math. **41** (2006), 1–8.

[BPZ06] A. Bérczes, A. Pethő and V. Ziegler, *Parameterized norm form equations with arithmetic progressions*, J. Symbolic Comput. **41** (2006), 790–810.

[Bo98] K. D. Boklan, *Problem 10702*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), p. 956.

[BCP97] W. Bosma, J. Cannon and C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[BHR00] B. Brindza, L. Hajdu and I. Z. Ruzsa, *On the equation* $x(x+d)\dots(x+(k-1)d)=by^2$, Glasgow Math. J. **42** (2000), 255–261.

[Br03] N. Bruin, *Chabauty methods using elliptic curves*, J. Reine Angew. Math. **562** (2003), 27–49.

[BGyHT06] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu and Sz. Tengely, *Arithmetic progressions consisting of unlike powers*, Indag. Math. **17** (2006), 539–555.

[BGy96] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of unit equations*, Acta Arith. **74** (1996), 67–80.

[BMS08] Y. Bugeaud, M. Mignotte and S. Siksek, *A multi-Frey approach to some multi-parameter families of Diophantine equations*, Canad. J. Math. **60** (2008), 491–519.

[C41] C. Chabauty, *Sur les points rationnels des variétés algébriques dont l'irrégularité est supérieure á la dimension*, C. R. Acad. Sci. Paris **212** (1941), 1022–1024.

[DG95] H. Darmon and A. Granville, *On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 513–543.

[DM97] H. Darmon and L. Merel, *Winding quotients and some variants of Fermat's Last Theorem*, J. Reine Angew. Math. **490** (1997), 81–100.

[De52] P. Dénes, *Über die diophantische Gleichung $x^l + y^l = cz^l$*, Acta Math. **88** (1952), 241–251.

[Di66] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers. Vol. II: Diophantine analysis*, Chelsea Publishing Co., New York, 1966, xxv+803 pp.

[DPT08] A. Dujella, A. Pethő and P. Tadić, *On arithmetic progressions on Pellian equations*, Acta Math. Hungar. **120** (2008), 29–38.

[Er39] P. Erdős, *Note on the product of consecutive integers*, J. London Math. Soc. **14** (1939), 194–198.

[Er51] P. Erdős, *On a diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176–178.

[ES75] P. Erdős and J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Illinois J. Math. **19** (1975), 292–301.

[grE89] G. R. Everest, *Counting the values taken by sums of S-units*, J. Number Theory **35** (1990), 269–286.

[grEGy05] G. R. Everest and K. Győry, *On some arithmetical properties of solutions of decomposable form equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **139** (2005), 27–40.

[E84] J.-H. Evertse, *On sums of S-units and linear recurrences*, Compositio Math. **53** (1984), 225–244.

[EGy85] J.-H. Evertse and K. Győry, *On unit equations and decomposable form equations*, J. Reine Angew. Math. **358** (1985), 6–19.

[EGy88a] J.-H. Evertse and K. Győry, *Finiteness criteria for decomposable form equations*, Acta Arith. **50** (1988), 357–379.

[EGy88b] J.-H. Evertse and K. Győry, *Decomposable form equations*, in: New Advances in Transcendence Theory (A. Baker ed.), pp. 175–202, Cambridge University Press, 1988.

[EGy97] J.-H. Evertse and K. Győry, *The number of families of solutions of decomposable form equations*, Acta Arith. **80** (1997), 367–394.

[EGyST88] J.-H. Evertse, K. Győry, C. Stewart and R. Tijdeman, *S-unit equations and their applications*, in: New Advances in Transcendence Theory (A. Baker ed.), pp. 110–174, Cambridge University Press, 1988.

[ESS02] J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei and W. M. Schmidt, *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group*, Annals Math. **155** (2002), 807–836.

[F83] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983) 349–366.

[FH01] P. Filakovszky and L. Hajdu, The resolution of the equation $x(x+d)\dots(x+(k-1)d) = by^2$ for fixed d, Acta Arith. **98** (2001), 151–154.

[F97] E. V. Flynn, *A flexible method for applying Chabauty's theorem*, Compositio Math. **105** (1997), 79–94.

[GPZ94] J. Gebel, A. Pethő and H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[GPS98] B. Goldsmith, S. Pabst and A. Scott, *Unit sum numbers of rings and modules*, Q. J. Math. Oxf. II. Ser. **49** (1998), 331–344.

[GT08] B. Green and T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Math. **167** (2008), 481–547.

[Gy79] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 583–600.

[Gy80] K. Győry, *Résultats effectifs sur la représentation des entiers par des formes décomposables*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **56**, Kingston, Canada, 1980.

[Gy92] K. Győry, *Some recent applications of S-unit equations*, in: Journées Arithmétiques de Geneve (1991), (D. F. Coray, Y.-F. S. Pétermann eds.), Astérisque **209**, Soc. Math. France, 1992, pp. 17–38.

[Gy97] K. Győry, *On the diophantine equation* $\binom{n}{k} = x^l$, Acta Arith. **80** (1997), 289–295.

[Gy98] K. Győry, *On the diophantine equation* $n(n+1)\dots(n+k-1) = bx^l$, Acta Arith. **83** (1998), 87–92.

[Gy99] K. Győry, *Power values of products of consecutive integers and binomial coefficients*, Number Theory and Its Applications, Kluwer Acad. Publ. 1999, 145–156.

[Gy02] K. Győry, *Solving Diophantine equations by Baker's theory*, in: A panorama of number theory or the view from Baker's garden (G. Wüstholz, ed.), Cambridge Univ. Press, 2002, pp. 38–72.

[GyHP09] K. Győry, L. Hajdu and Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.

[GyHS04] K. Győry, L. Hajdu and N. Saradha, *On the Diophantine equation* $n(n+d)\dots(n+(k-1)d) = by^l$, Canad. Math. Bull. **47** (2004), 373–388.

[GyMS90] K. Győry, M. Mignotte and T. Shorey, *On some arithmetical properties of weighted sums of* S*-units*, Math. Pann. **1** (1990), 25–43.

[GyP08] K. Győry and Á. Pintér, *Polynomial powers and a common generalization of binomial Thue-Mahler equations and* S*-unit equations*, in: Diophantine Equations (Mumbai, 2005, N. Saradha ed.), Narosa Publishing House, Mumbai, 2008, 103–121.

[GyY06] K. Győry and Kunrui Yu, *Bounds for the solutions of* S*-unit equations and decomposable form equations*, Acta Arith. **123** (2006), 9–41.

[H04] L. Hajdu, *Perfect powers in arithmetic progression. A note on the inhomogeneous case*, Acta Arith. **113** (2004), 343–349.

[H07] L. Hajdu, *Arithmetic progressions in linear combinations of* S*-units*, Period. Math. Hungar. **54** (2007), 175–181.

[H08] L. Hajdu, *Powerful arithmetic progressions*, Indag. Math. **19** (2008), 547–561.

[HT] L. Hajdu and Sz. Tengely, *Arithmetic progressions of squares, cubes and n-th powers*, J. Functiones et Approximatio (közlésre elfogadva).

[HTT09] L. Hajdu, Sz. Tengely and R. Tijdeman, *Cubes in products of terms in arithmetic progression*, Publ. Math. Debrecen **74** (2009), 215–232.

[HKLST07] N. Hirata-Kohno, S. Laishram, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *An extension of a theorem of Euler*, Acta Arith. **129** (2007), 71–102.

[JN07] M. Jarden and W. Narkiewicz, *On sums of units*, Monatsh. Mat. **150** (2007), 327–332.

[K97] A. Kraus, *Majorations effectives pour l'équation de Fermat généralisée*, Canad. J. Math. **49** (1997), 1139–1161.

[L64] S. Lang, *Diophantine approximation on toruses*, Amer. J. Math. **86** (1964), 521–533.

[L78] S. Lang, *Elliptic Curves; Diophantine Analysis*, Grundlehren Math. Wiss. **231**, Springer, Berlin, 1978.

[Mar85] R. Marszalek, *On the product of consecutive elements of an arithmetic progression*, Monatsh. für Math. **100** (1985), 215–222.

[Mas85] D. W. Masser, *Open problems*, in: Proc. Symp. Analytic Number Theory (W. W. L. Chen ed.), Imperial Coll. London, 1985.

[Mi04] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 167–195.

[Mo69] L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, London and New York, 1969.

[MS04] A. Mukhopadhyay and T. N. Shorey, *Square free part of products of consecutive integers*, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), 79–99.

[Ob50] R. Obláth, *Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reiche*, Publ. Math. Debrecen **1** (1950), 222–226.

[Ob51] R. Obláth, *Eine Bemerkung über Produkte aufeinander folgender Zahlen*, J. Indian Math. Soc. **15** (1951), 135–139.

[Oe88] J. Oesterlé, *Nouvelles approches du „Théorème" de Fermat*, Astérisque **161** (1988), 165–186.

[Pe82] A. Pethő, *Perfect powers in second order linear recurrences*, J. Number Theory **15** (1982), 5–13.

[PZ08] A. Pethő and V. Ziegler, *Arithmetic progressions on Pell equations*, J. Number Theory **128** (2008), 1389–1409.

[Po06] M. Pohst, Private communication, 2006.

[vdPS82] A. J. van der Pooreten and H. P. Schlickewei, *The groth condition for recurrence sequences*, Macquarie Univ. Math. Rep. 82-0041, North Ryde, Australia (1982).

[Rib97] K. Ribet, *On the equation $a^p + 2^\alpha b^p + c^p = 0$*, Acta Arith. **79** (1997), 7–16.

[Rig39] O. Rigge, *Über ein diophantisches Problem*, in: 9th Congress Math. Scand. (Helsingfors 1938.), Mercator, 1939, pp. 155–160.

[Ro00] J. P. Robertson, *The Maximum Length of a Powerful Arithmetic Progression: 10702*, Amer. Math. Monthly **107** (2000), p. 951.

[Sa97] N. Saradha, *On perfect powers in products with terms from arithmetic progressions*, Acta Arith. **82** (1997), 147–172.

[Sa98] N. Saradha, *Squares in products with terms in an arithmetic progression*, Acta Arith. **86** (1998), 27–43.

[SS01] N. Saradha and T.N. Shorey, *Almost perfect powers in arithmetic progression*, Acta Arith. **99** (2001), 363–388.

[SS03a] N. Saradha and T. N. Shorey, *Almost squares in arithmetic progression*, Compositio Math. **138** (2003), 73–111.

[SS03b] N. Saradha and T. N. Shorey, *Almost squares and factorisations in consecutive integers*, Compositio Math. **138** (2003), 113–124.

[ScTi76] A. Schinzel and R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$*, Acta Arith. **31** (1976), 199–204.

[Sc72] W. M. Schmidt, *Norm form equations*, Ann. of Math. **96** (1972), 526–551.

[Se51] E. Selmer, *The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$*, Acta Math. **85** (1951), 205–362.

[Sh02] T. N. Shorey, *Powers in arithmetic progression*, in: A Panorama in Number Theory or The View from Baker's Garden (G. Wüstholz ed.), Cambridge University Press, 2002, 341–353.

[ShSt83] T. N. Shorey and C. L. Stewart, *On the diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences*, Math. Scand. **52** (1983), 24–36.

[ShTi86] T. Shorey and R. Tijdeman, *Expontial diophantine equations*, Cambridge University Press, 1986.

[ShTi90] T. Shorey and R. Tijdeman, *Perfect powers in product of terms in an arithmetical progression*, Compositio Math. **75** (1990), 307–344.

[ShTi97] T. Shorey and R. Tijdeman, *Some methods of Erdős applied to finite arithmetic progression*, The Mathematics of Paul Erdős I, Springer, 1997, 251–267.

[Si21] C. L. Siegel, *Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Z. **10** (1921), 173–213.

[Sm93] SIMATH manual, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany, 1993.

[StTz94] R. J. Stroeker and N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177–196.

[Te08] Sz. Tengely, *Note on a paper „An extension of a theorem of Euler" by Hirata-Kohno et al.*, Acta Arith. **134** (2008), 329–335.

[Ti76a] R. Tijdeman, *Diophantine equations and diophantine approximations*, in: Number Theory and Applications (R. A. Mollin, ed.), North-Holland, 1976, 399–416.

[Ti76b] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. **29** (1976), 197–209.

[Ti89] R. Tijdeman, *Applications of the Gelfond-Baker method to rational number theory*, in: Topics in Number Theory (P. Turán ed.), Kluwer Acad. Publ., 1989, 215–243.

[Ti98] R. Tijdeman, *Exponential diophantine equations 1986-1996*, in: Number Theory: Diophantine, Computational and Algebraic Aspects (K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós, eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998, 523–540.

[vdW27] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw Archief voor Wiskunde **19** (1927), 212–216.

[W95] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math. **141** (1995), 443–551.

[Za87] D. Zagier, *Large integral points on elliptic curves*, Math. Comp. **48** (1987), 425–436.

[Ze54] D. Zelinsky, *Every linear transformation is a sum of nonsingular ones*, Proc. Am. Math. Soc. **5** (1954), 627–630.

IV. A disszertáció témakörében (diofantikus számelmélet) készült publikációim jegyzéke

Összesen 50, többségében ismert nemzetközi folyóiratban megjelent publikációval rendelkezem, melyekre 196 idegen hivatkozást ismerek. Az alábbiakban csupán a disszertáció témakörében (diofantikus számelmélet) készült publikációim jegyzékét adom meg.

IV.1 Diofantikus egyenletekkel kapcsolatos publikációk

[D1] L. Hajdu, *A quantitative version of Dirichlet's S-unit theorem in algebraic number fields*, Publ. Math. Debrecen **42** (1993), 239–246.

[D2] L. Hajdu, *On a diophantine equation concerning the number of integer points in special domains II*, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), 331–342.

[D3] L. Hajdu and T. Herendi, *Explicit bounds for the solutions of elliptic equations with rational coefficients*, J. Symbolic Computation **25** (1998), 361–366.

[D4] A. Bérczes, B. Brindza and L. Hajdu, *On power values of polynomials*, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 375–381.

[D5] L. Hajdu and Á. Pintér, *Square product of three integers in short intervals*, Math. Comp. **68** (1999), 1299–1301.

[D6] B. Brindza, L. Hajdu and I. Z. Ruzsa, On the equation $x(x+d)\dots(x+(k-1)d)=by^2$, Glasgow Math. J. **42** (2000), 255–261.

[D7] L. Hajdu and Á. Pintér, *Combinatorial diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 391–403.

[D8] Y. Bugeaud and L. Hajdu, *Lower bounds for the difference* $|ax^n - by^m|$, Acta Math. Hungar. **87** (2000), 279–286.

[D9] L. Hajdu and L. Szalay, *On the Diophantine equations* $(2^n-1)(6^n-1)=x^2$ *and* $(a^n-1)(a^{kn}-1)=x^2$, Period. Math. Hungar. **40** (2000), 141–145.

[D10] P. Filakovszky and L. Hajdu, *The resolution of the equation* $x(x+d)\dots(x+(k-1)d)=by^2$ *for fixed* d, Acta Arith. **98** (2001), 151–154.

[D11] K. Győry, L. Hajdu and N. Saradha, *On the diophantine equation* $n(n+d)\dots(n+(k-1)d)=by^l$, Canad. Math. Bull. **47** (2004), 373–388. Correction: Canad. Math. Bull. 48 (2005), 636.

[D12] L. Hajdu, *Perfect powers in arithmetic progression. A note on the inhomogeneous case*, Acta Arith. **113** (2004), 343–349.

[D13] M. Bennett, N. Bruin, K. Győry and L. Hajdu, *Powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. **92** (2006), 273–306.

[D14] N. Bruin, K. Győry, L. Hajdu and Sz. Tengely, *Arithmetic progressions consisting of unlike powers*, Indag. Math. **17** (2006), 539–555.

[D15] L. Hajdu and Zs. Turi Nagy, *Power values of sums of binary forms*, Publ. Math. Debrecen **69** (2006), 321–331.

[D16] L. Hajdu, *Arithmetic progressions in linear combinations of S-units*, Period. Math. Hungar. **54** (2007), 175–181.

[D17] L. Hajdu, *Powerful arithmetic progressions*, Indag. Math. **19** (2008), 547–561.

[D18] Zs. Ádám, L. Hajdu and F. Luca, *Representing integers as linear combinations of S-units*, Acta Arith. **138** (2009), 101–107.

[D19] L. Hajdu and T. Kovács, *Parallel LLL-reduction for bounding the integral solutions of elliptic equations*, Math. Comp. **78** (2009), 1201–1210.

[D20] L. Hajdu, Sz. Tengely and R. Tijdeman, *Cubes in products of terms in arithmetic progression*, Publ. Math. Debrecen **74** (2009), 215–232.

[D21] K. Győry, L. Hajdu and Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.

[D22] L. Hajdu, *Optimal systems of fundamental S-units for LLL-reduction*, Period. Math. Hungar. **59** (2009), 79–105.

[D23] A. Bérczes, L. Hajdu and A. Pethő, *Arithmetic progressions in the solution sets of norm form equations*, Rocky Mountain J. Math. (közlésre elfogadva).

[D24] L. Hajdu and Sz. Tengely, *Arithmetic progressions of squares, cubes and n-th powers*, J. Functiones et Approximatio (közlésre elfogadva).

IV.2 Polinomokkal kapcsolatos publikációk

[P1] A. Bérczes and L. Hajdu, *Computational experiences on the distances of polynomials to irreducible polynomials*, Math. Comp. **66** (1997), 391–398.

[P2] L. Hajdu, *On a problem of Győry and Schinzel concerning polynomials*, Acta Arith. **78** (1997), 287–295.

[P3] A. Bérczes and L. Hajdu, *On a problem of P. Turán concerning irreducible polynomials, in: Number Theory: Diophantine, Computational and Algebraic Aspects (K. Győry, A. Pethő and V. T. Sós eds.) 1998, pp. 95–101.*

[P4] L. Hajdu and R. Tijdeman, *Polynomials dividing infinitely many quadrinomials or quintinomials*, Acta Arith. **107** (2003), 381–404.

[P5] K. Győry, L. Hajdu, Á. Pintér and A. Schinzel, *Polynomials determined by a few of their coefficients*, Indag. Math. **15** (2004), 209–221.

[P6] L. Hajdu, *Irreducible polynomials in arithmetic progressions and a problem of Szegedy*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 363–370.

[P7] L. Hajdu and R. Tijdeman, *A criterion for polynomials to divide infinitely many k-nomials*, Diophantine Approximations, (H. P. Schlickewei, K. Schmidt and R. F. Tichy, eds.), Developments in Mathematics 16, Springer-Verlag, 2008, pp. 211–220.